Mutations :
des récurrences dans tous les sens !

Bernard Leclerc,
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

Caen, 25 mai 2011

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$F_1 = F_2 = 1,$$

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 3). \end{aligned}$$

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 3). \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$F_1 = F_2 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 3).$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

Exercice

Trouver une formule pour calculer F_n en fonction de n.

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 3). \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

Exercice

Trouver une formule pour calculer F_n en fonction de n.

Réponse

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

La suite de Fibonacci ($\sim$ 1200)

On définit la suite F_n par :

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 3). \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

Exercice

Trouver une formule pour calculer F_n en fonction de n.

Réponse

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$F_{101} = 573147844013817084101$

Les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux

Ce sont les nombres $\binom{n}{k}$ donnés par

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Les coefficients binomiaux

Ce sont les nombres $\binom{n}{k}$ donnés par

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

On peut les obtenir par récurrence :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

Les coefficients binomiaux

Ce sont les nombres $\binom{n}{k}$ donnés par

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

On peut les obtenir par récurrence :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1, \\ \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad (n \geq k \geq 1). \end{aligned}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu : $x \quad y$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & x+y & \end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu : $\begin{array}{cc} x & y \\ & \color{red}{x+y} \end{array}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & & 1 & & & & & \\
1 & & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & & & 1 & & & \\
1 & & & & 1 & & \\
1 & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & x+y & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu : $\begin{array}{ccc} x & & y \\ & x+y & \end{array}$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & & & 1 & & \\
1 & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu : $\begin{array}{ccc} x & & y \\ & x+y & \end{array}$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & & & & & 1 \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu : $\begin{matrix} x & & y \\ & x+y & \end{matrix}$

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & & & & 1 \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} \color{blue}{x} & \color{blue}{y} \\ & \color{red}{x+y} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\color{blue}{1} & & & & & & \\
\color{blue}{1} & \color{blue}{1} & & & & & \\
\color{blue}{1} & \color{red}{2} & \color{blue}{1} & & & & \\
\color{blue}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{3} & \color{blue}{1} & & & \\
\color{blue}{1} & \color{red}{4} & \color{red}{6} & \color{red}{4} & \color{blue}{1} & & \\
\color{blue}{1} & \color{red}{5} & \color{red}{10} & & & \color{blue}{1} & \\
\color{blue}{1} & & & & & & \color{blue}{1} \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & & 1 & \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

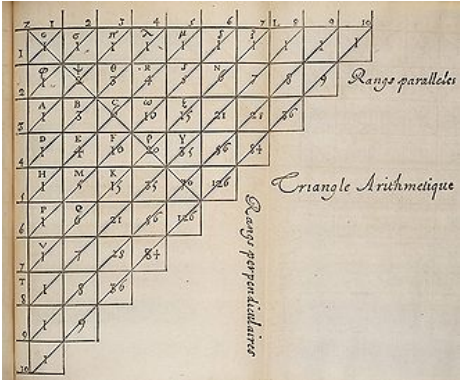
$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Le triangle de Pascal (1655)

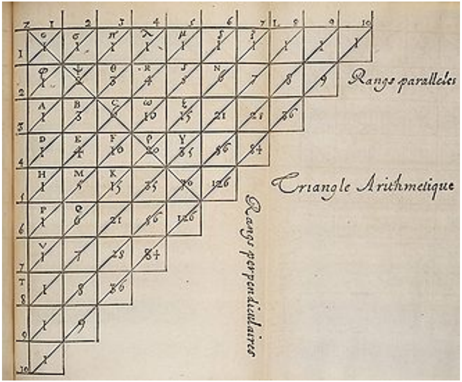
Règle du jeu :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ & x+y \end{array}$$

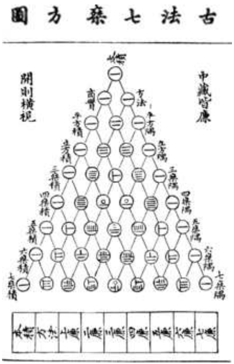
$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$



Pascal, Traité du triangle arithmétique, 1655



Pascal, Traité du triangle arithmétique, 1655



Yang Hui, $\sim$ 1270

Frises de Coxeter (1971)

Frises de Coxeter (1971)

Règle du jeu :

Frises de Coxeter (1971)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \\ & z & \end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

Règle du jeu :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \dfrac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

	1	1	1	1	1	1	1	1
1								
	1							
1								
	1	1	1	1	1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2													
	1														
1															
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2													
	1		5												
1		2													
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5												
1		2													
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5												
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5		2										
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1									
	1		5		2										
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1									
	1		5		2		1								
1		2		3		1									
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
1																	
	1																
		1															
			1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2
1 5 2 1 5 2 1 5
1 2 3 1 2 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2
1
1
1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2
1 5 2 1 5 2 1 5
1 2 3 1 2 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2
1 3
1
1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
1		2															
	1		3														
		1		4													
			1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		2													
	1		3		3												
		1		4													
			1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		2		2											
	1		3		3												
		1		4													
			1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2
1 5 2 1 5 2 1 5
1 2 3 1 2 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 2
1 3 3
1 4 1
1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2
1 5 2 1 5 2 1 5
1 2 3 1 2 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 2
1 3 3 1
1 4 1
1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
& 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 \\
& 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & \\
& & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1

1

1

1

1

1

1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1	
1		2														
	1															
1																
	1															
1																
	1		1		1		1		1		1		1		1	

Frises de Coxeter (1971)

1 1 1 1 1 1 1 1

1 2

1

1 2

1

1 2

1 1 1 1 1 1 1 1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1	1	1	1	1	1	1
1		2							
	1		5						
1		2							
	1		5						
1		2							
	1		1	1	1	1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1	1	1	1	1	1
1		2		3						
	1		5							
1		2								
	1		5							
1		2		3						
	1		1		1	1	1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1	1	1	1	1	1
1		2		3						
	1		5							
1		2		13						
	1		5							
1		2		3						
	1		1		1	1	1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5		8										
1		2		13											
	1		5		8										
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 8 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 13 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 8 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		3									
	1		5		8										
1		2		13		5									
	1		5		8										
1		2		3		3									
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1	1	1	1
1		2		3		3						
	1		5		8		2					
1		2		13		5						
	1		5		8		2					
1		2		3		3						
	1		1		1		1		1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		3		1							
	1		5		8		2								
1		2		13		5		1							
	1		5		8		2								
1		2		3		3		1							
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		3		1							
	1		5		8		2		1						
1		2		13		5		1							
	1		5		8		2		1						
1		2		3		3		1							
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		3		1		2		3		3	
	1		5		8		2		1		5		8		2
1		2		13		5		1		2		13		5	
	1		5		8		2		1		5		8		2
1		2		3		3		1		2		3		3	
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter (1971)

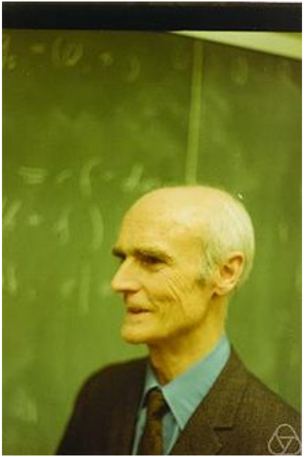
$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 3 & \\
 & 1 & & 5 & & 8 & & 2 & & 1 & & 5 & & 8 & & 2 \\
1 & & 2 & & 13 & & 5 & & 1 & & 2 & & 13 & & 5 & \\
 & 1 & & 5 & & 8 & & 2 & & 1 & & 5 & & 8 & & 2 \\
1 & & 2 & & 3 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 3 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

- On obtient des nombres entiers !

Frises de Coxeter (1971)

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		3		1		2		3		3	
	1		5		8		2		1		5		8		2
1		2		13		5		1		2		13		5	
	1		5		8		2		1		5		8		2
1		2		3		3		1		2		3		3	
	1		1		1		1		1		1		1		1

- On obtient des nombres entiers !
- C'est périodique !



H. M. Coxeter 1907 – 2003

Suite de Somos (1989)

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
x_k	2	3	7	23	59	314	1529	8209	83313	$\cdots$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
x_k	2	3	7	23	59	314	1529	8209	83313	$\cdots$

- On obtient des nombres entiers !

Suite de Somos (1989)

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2} = \dfrac{x_2 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 + x_4^2}{x_2} = \dfrac{x_2 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$
- $x_7 = \dfrac{x_4 x_6 + x_5^2}{x_3}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \qquad (k \geq 5).$$

- $x_5 = \dfrac{x_2x_4 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \dfrac{x_3x_5 + x_4^2}{x_2} = \dfrac{x_2x_3x_4 + x_3^3 + x_1x_4^2}{x_1x_2}$
- $x_7 = \dfrac{x_4x_6 + x_5^2}{x_3} =$
  $\dfrac{2x_2^2x_3^2x_4 + x_1x_3^3x_4 + x_1^2x_4^3 + x_2^3x_4^2 + x_2x_3^4 + x_1x_2x_3x_4^2}{x_1^2x_2x_3}$

Suite de Somos (1989)

- $x_8 = (x_1^3x_3x_4^4 + 2x_1^2x_3^4x_4^2 + 3x_1^2x_2x_3^2x_4^3 + x_1x_3^7 + 3x_1x_2x_3^5x_4 + 3x_1x_2^2x_3^3x_4^2 + x_2^2x_3^6 + 3x_2^3x_3^4x_4 + 3x_2^4x_3^2x_4^2 + x_2^5x_4^3 + x_1^2x_2^2x_4^4 + x_1x_2^3x_3x_4^3)/x_1^3x_2^2x_3x_4$

Suite de Somos (1989)

- $x_8 = (x_1^3x_3x_4^4 + 2x_1^2x_3^4x_4^2 + 3x_1^2x_2x_3^2x_4^3 + x_1x_3^7 + 3x_1x_2x_3^5x_4 + 3x_1x_2^2x_3^3x_4^2 + x_2^2x_3^6 + 3x_2^3x_3^4x_4 + 3x_2^4x_3^2x_4^2 + x_2^5x_4^3 + x_1^2x_2^2x_4^4 + x_1x_2^3x_3x_4^3)/{\color{red}x_1^3x_2^2x_3x_4}$

- $x_9 = (x_1^4x_4^6 + 2x_1^2x_2^3x_4^5 + 3x_1^3x_2x_3x_4^5 + x_2^6x_4^4 + 3x_1x_2^4x_3x_4^4 + 5x_1^2x_2^2x_3^2x_4^4 + 3x_1^3x_3^3x_4^4 + 4x_2^5x_3^2x_4^3 + 7x_1x_2^3x_3^3x_4^3 + 6x_1^2x_2x_3^4x_4^3 + 6x_2^4x_3^4x_4^2 + 6x_1x_2^2x_3^5x_4^2 + 3x_1^2x_3^6x_4^2 + 4x_2^3x_3^6x_4 + 3x_1x_2x_3^7x_4 + x_2^2x_3^8 + x_1x_3^9)/{\color{red}x_1^3x_2^3x_3^2x_4}$

Suite de Somos (1989)

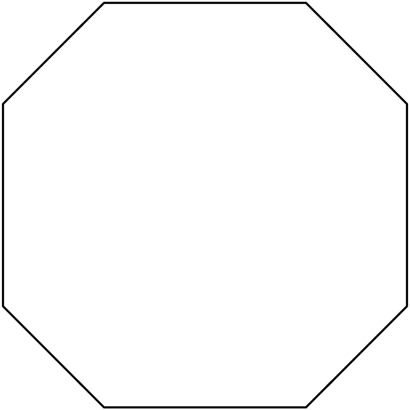
- $x_8 = (x_1^3 x_3 x_4^4 + 2x_1^2 x_3^4 x_4^2 + 3x_1^2 x_2 x_3^2 x_4^3 + x_1 x_3^7 + 3x_1 x_2 x_3^5 x_4 + 3x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^2 + x_2^2 x_3^6 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^4 x_3^2 x_4^2 + x_2^5 x_4^3 + x_1^2 x_2^2 x_4^4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4^3)/x_1^3 x_2^2 x_3 x_4$

- $x_9 = (x_1^4 x_4^6 + 2x_1^2 x_2^3 x_4^5 + 3x_1^3 x_2 x_3 x_4^5 + x_2^6 x_4^4 + 3x_1 x_2^4 x_3 x_4^4 + 5x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^4 + 3x_1^3 x_3^3 x_4^4 + 4x_2^5 x_3^2 x_4^3 + 7x_1 x_2^3 x_3^3 x_4^3 + 6x_1^2 x_2 x_3^4 x_4^3 + 6x_2^4 x_3^4 x_4^2 + 6x_1 x_2^2 x_3^5 x_4^2 + 3x_1^2 x_3^6 x_4^2 + 4x_2^3 x_3^6 x_4 + 3x_1 x_2 x_3^7 x_4 + x_2^2 x_3^8 + x_1 x_3^9)/x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4$

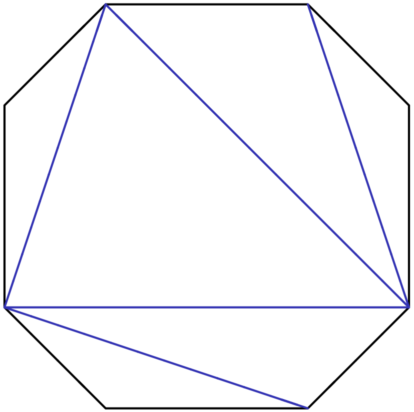
- C'est un polynôme de Laurent à coefficients entiers !

Triangulations de polygones

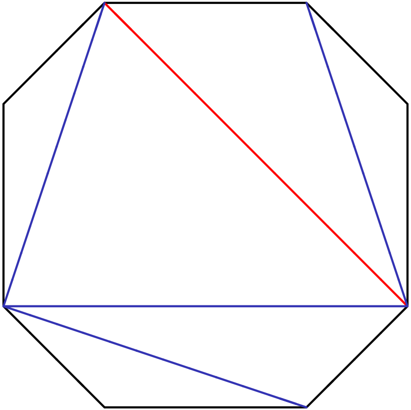
Triangulations de polygones



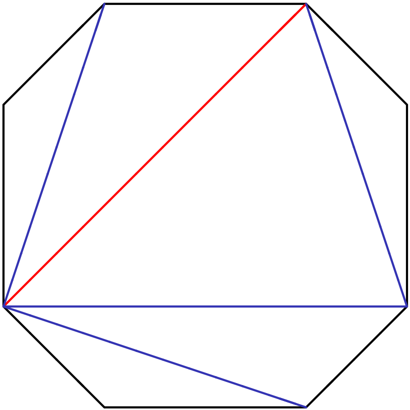
Triangulations de polygones



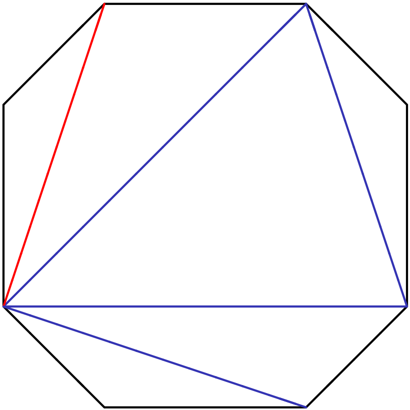
Triangulations de polygones



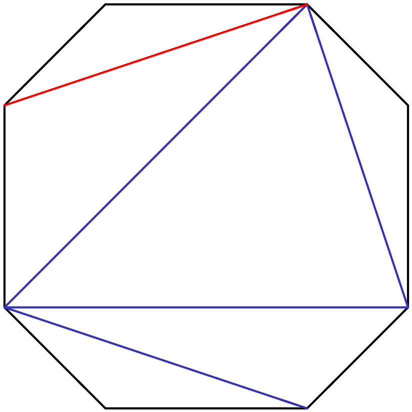
Triangulations de polygones



Triangulations de polygones



Triangulations de polygones



Triangulations de polygones

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Définition

On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Définition

On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

On peut engendrer toutes les triangulations par récurrence :

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Définition

On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

On peut engendrer toutes les triangulations par récurrence :

- On fixe une triangulation initiale T_{init};

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Définition

On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

On peut engendrer toutes les triangulations par récurrence :

- On fixe une triangulation initiale T_{init};
- On construit les mutations $\mu_D(T_{init})$ par rapport à chacune des diagonales D de T_{init};

Triangulations de polygones

Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

Définition

On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

On peut engendrer toutes les triangulations par récurrence :

- On fixe une triangulation initiale T_{init};
- On construit les mutations $\mu_D(T_{init})$ par rapport à chacune des diagonales D de T_{init};
- On construit les mutations des mutations;

Triangulations de polygones

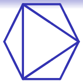
Soit T une triangulation, D une diagonale de T.

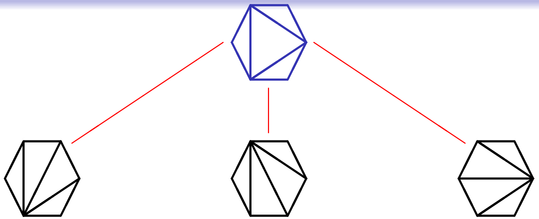
Définition

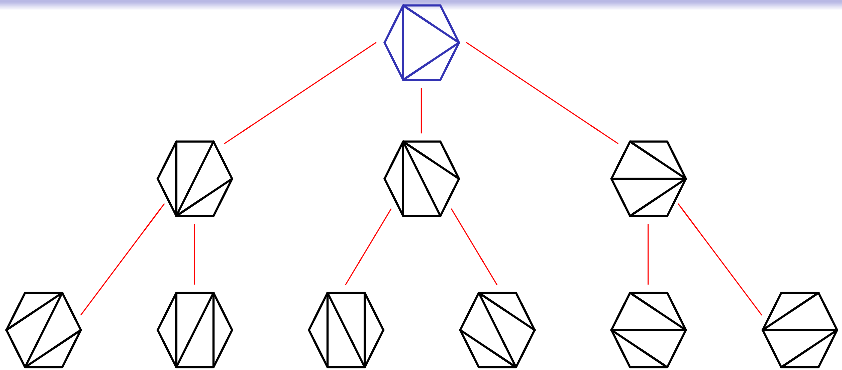
On appelle **mutation** de T par rapport à D la triangulation $\mu_D(T)$ obtenue en remplaçant D par la seule autre diagonale possible.

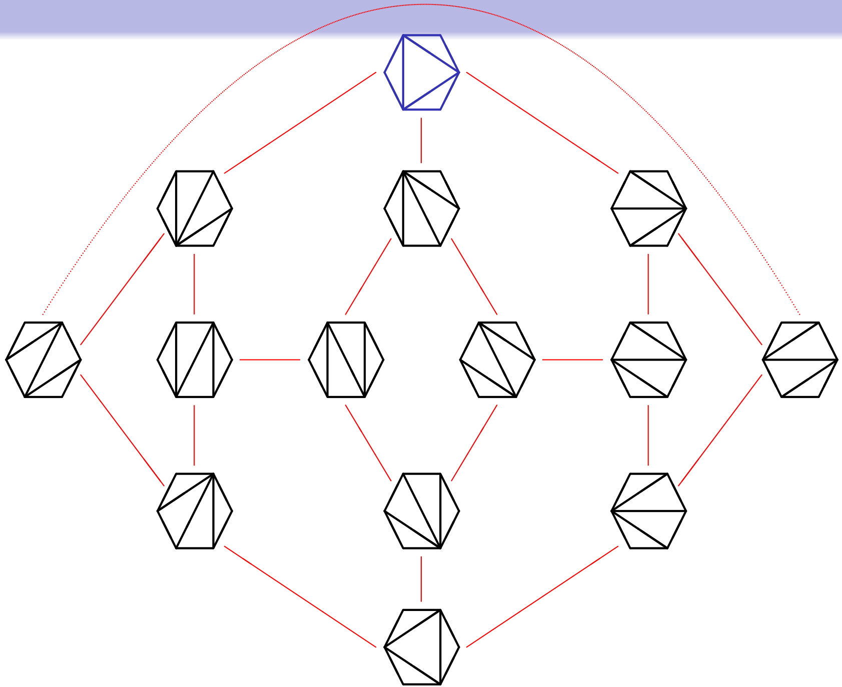
On peut engendrer toutes les triangulations par récurrence :

- On fixe une triangulation initiale T_{init};
- On construit les mutations $\mu_D(T_{init})$ par rapport à chacune des diagonales D de T_{init};
- On construit les mutations des mutations;
- *etc...*



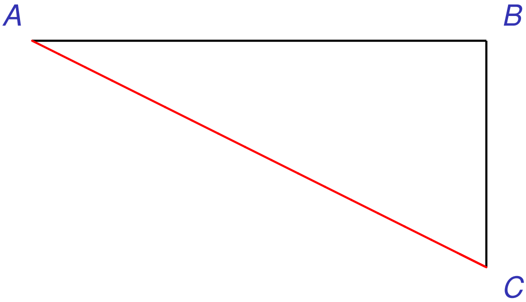




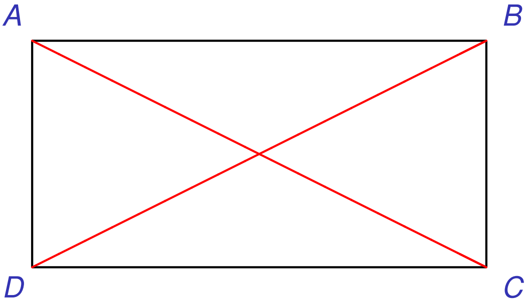


Le théorème de Pythagore

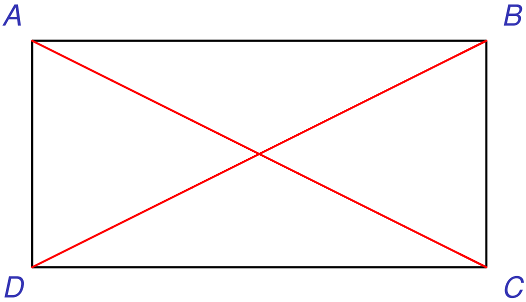
Le théorème de Pythagore



Le théorème de Pythagore



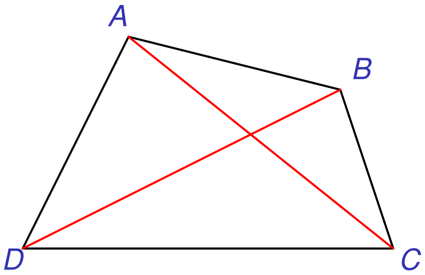
Le théorème de Pythagore



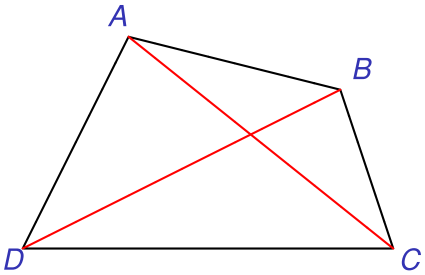
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Le théorème de Ptolémée

Le théorème de Ptolémée



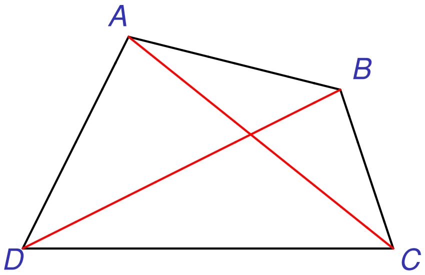
Le théorème de Ptolémée



Si A, B, C, D sont **cocycliques**:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Le théorème de Ptolémée



Si A, B, C, D sont **cocycliques**:

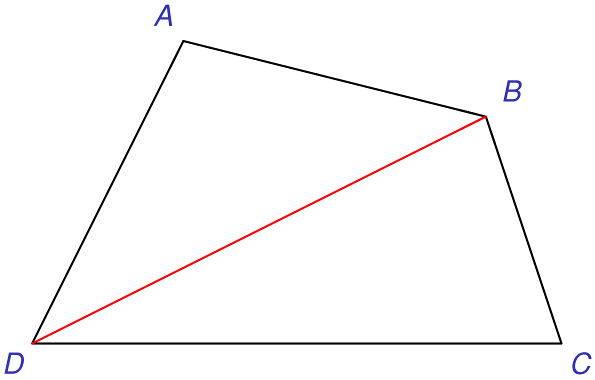
$$\color{red}{AC \cdot BD} \color{black}{= AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

Exercice

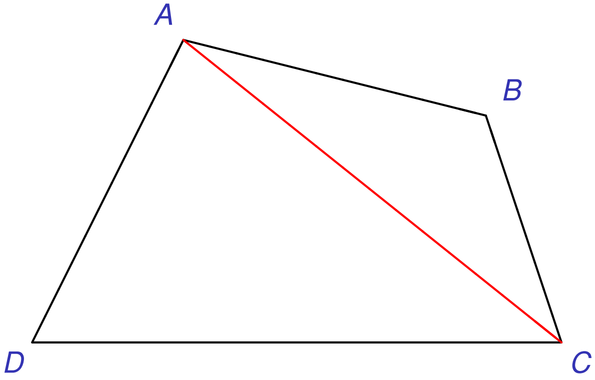
Démontrer le théorème de Ptolémée.

Mutation de longueur

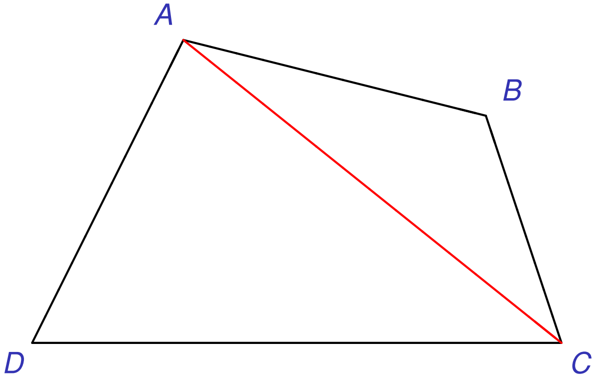
Mutation de longueur



Mutation de longueur

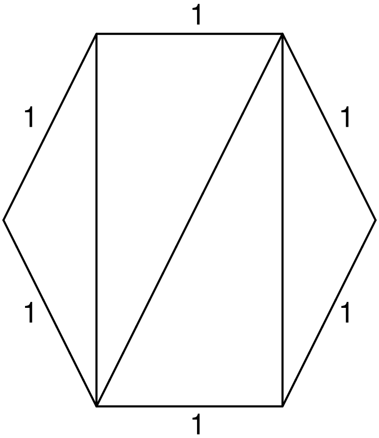


Mutation de longueur

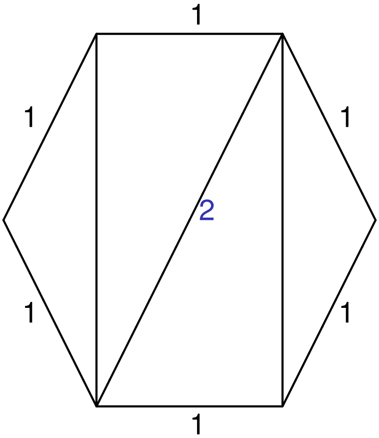


$$AC = \frac{AB \cdot CD + AD \cdot BC}{BD}$$

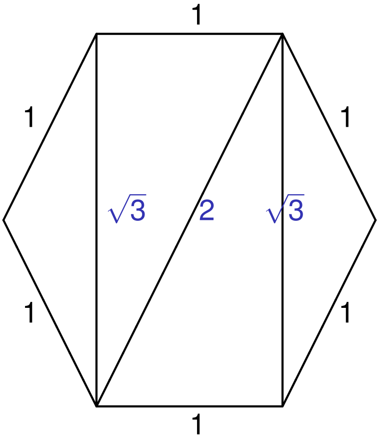
Mutation de longueur



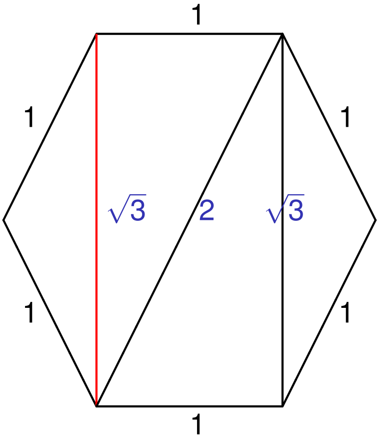
Mutation de longueur



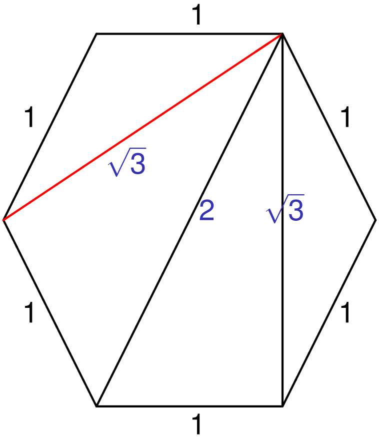
Mutation de longueur



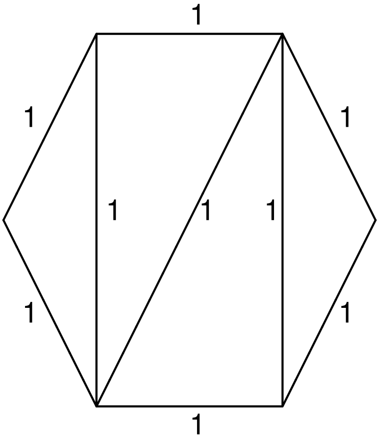
Mutation de longueur



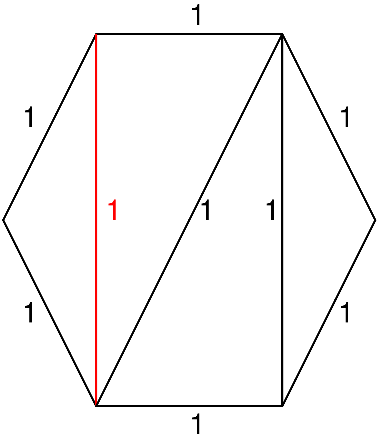
Mutation de longueur



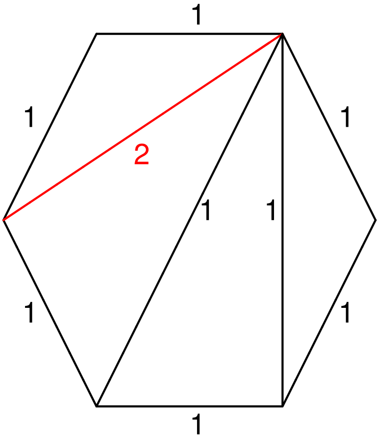
Mutation de “longueur”



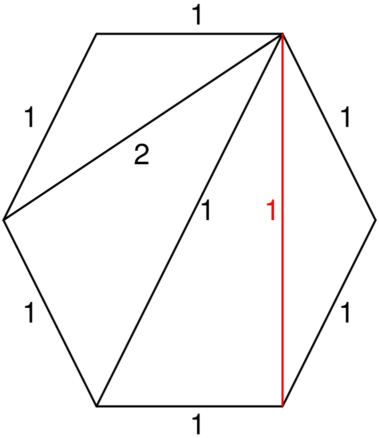
Mutation de “longueur”



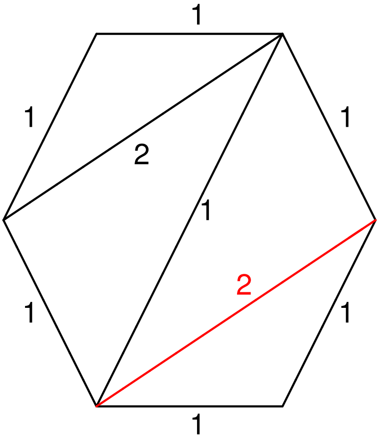
Mutation de “longueur”



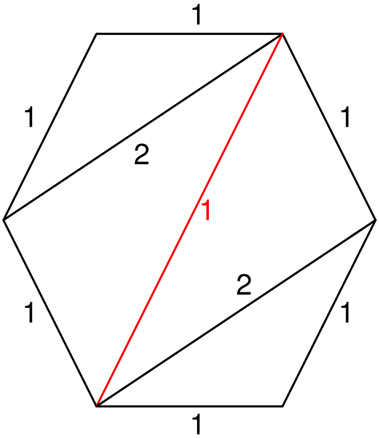
Mutation de “longueur”



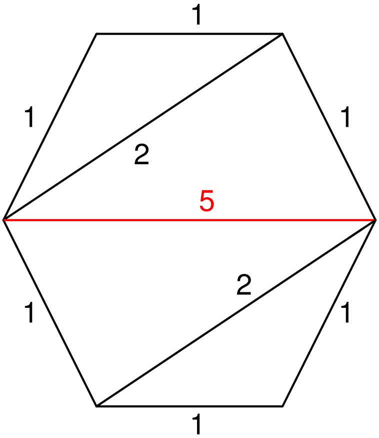
Mutation de “longueur”



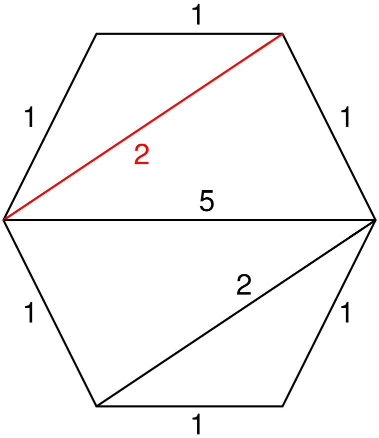
Mutation de “longueur”



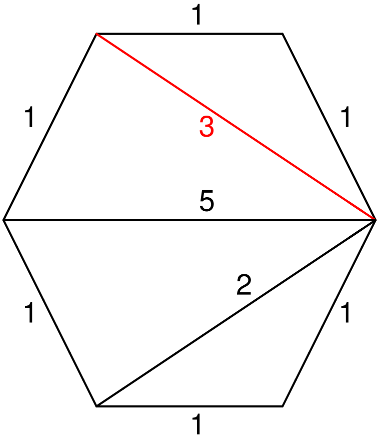
Mutation de “longueur”



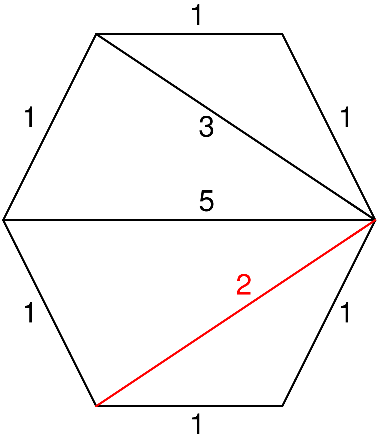
Mutation de “longueur”



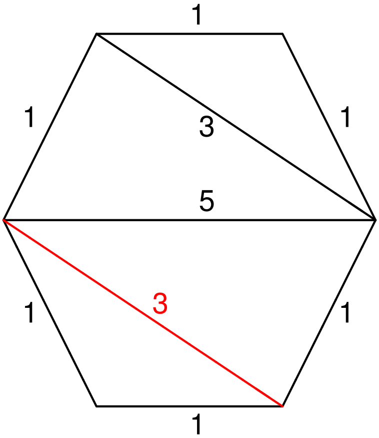
Mutation de “longueur”



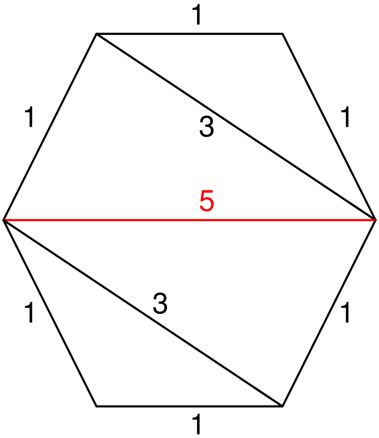
Mutation de “longueur”



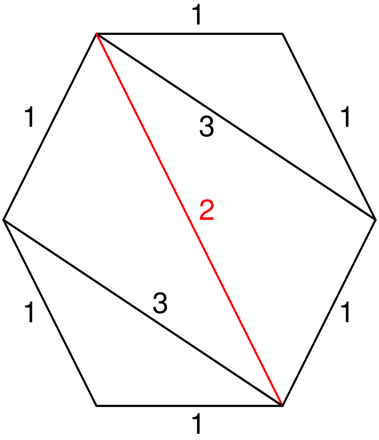
Mutation de “longueur”



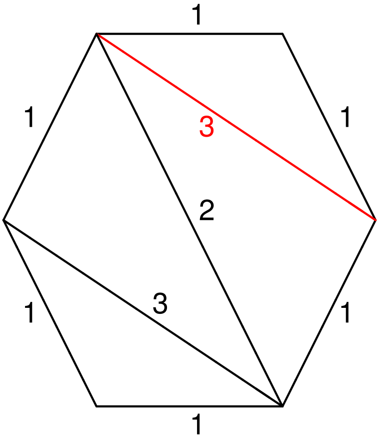
Mutation de “longueur”



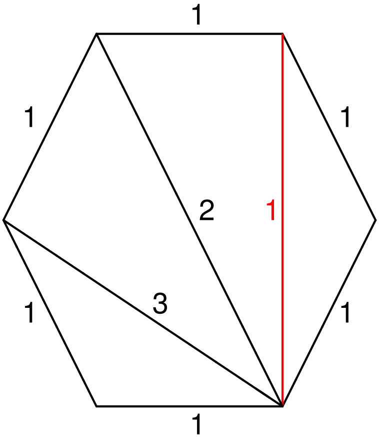
Mutation de "longueur"



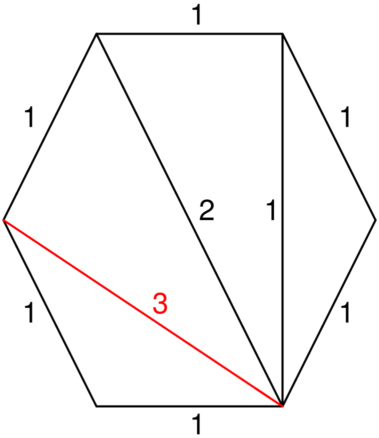
Mutation de “longueur”



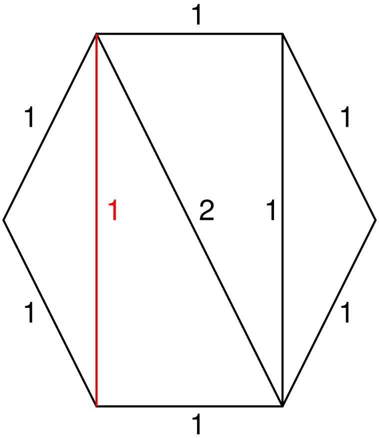
Mutation de “longueur”



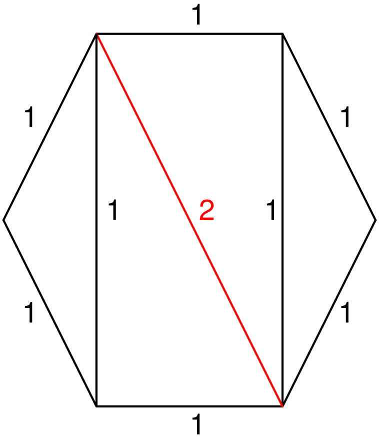
Mutation de “longueur”



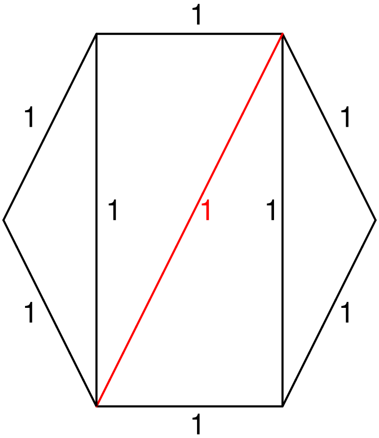
Mutation de “longueur”



Mutation de “longueur”



Mutation de “longueur”



Frises de Coxeter : le retour

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2													
	1														
1															
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2													
	1														
1		2													
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5												
1		2													
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5												
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3											
	1		5		2										
1		2		3											
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter : le retour

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1									
	1		5		2		1								
1		2		3		1									
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

Frises de Coxeter : le retour

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Exercice

- Retrouver d'autres frises à partir de mutations de triangulations.

Frises de Coxeter : le retour

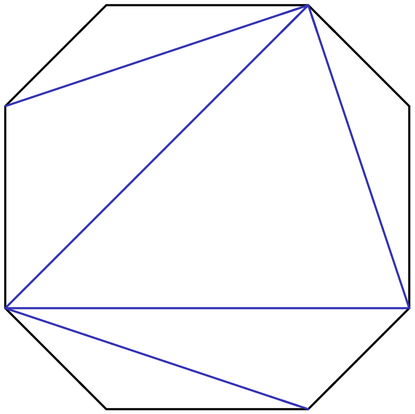
	1		1		1		1		1		1		1		1
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		5		2		1		5		2		1		5
1		2		3		1		2		3		1		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1

Exercice

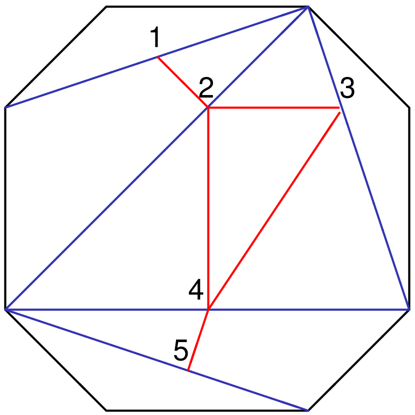
- Retrouver d'autres frises à partir de mutations de triangulations.
- Etudier les liens entre frises et triangulations.

Graphe d’une triangulation

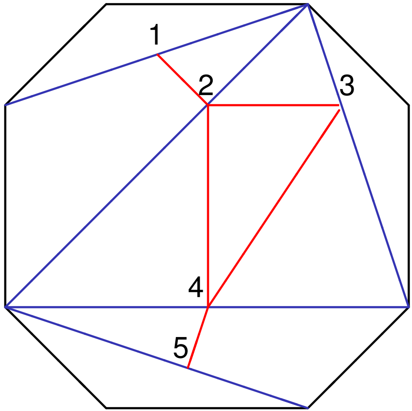
Graphe d’une triangulation



Graphe d’une triangulation

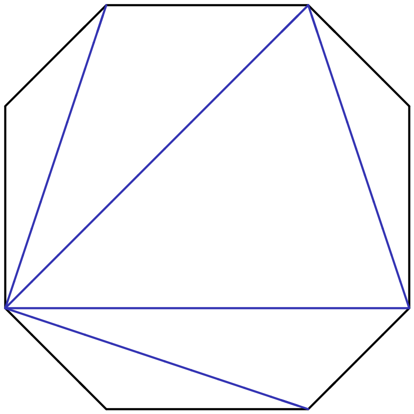


Graphe d’une triangulation

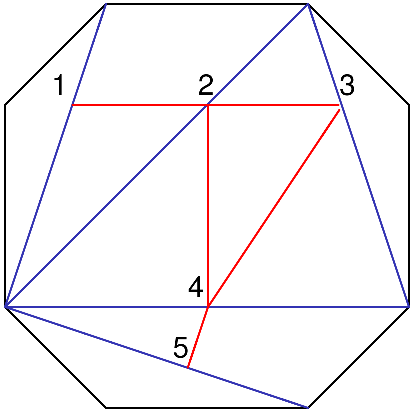


$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[u] & \\
 & 5 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

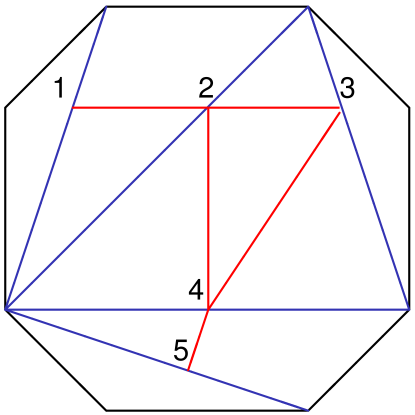
Graphe d’une triangulation : mutation



Graphe d’une triangulation : mutation

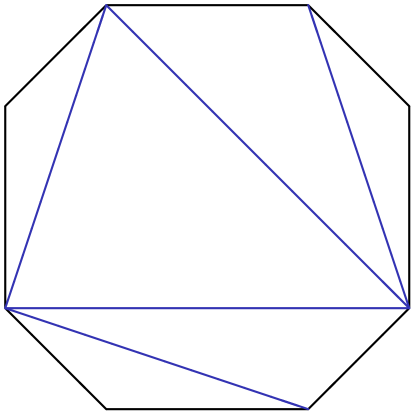


Graphe d’une triangulation : mutation

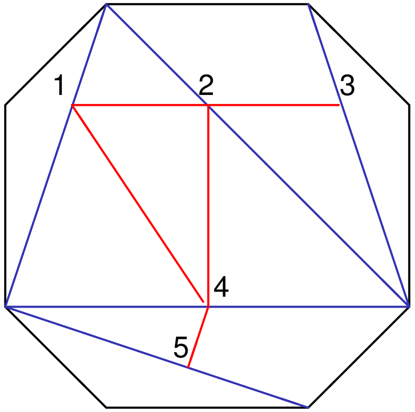


$$
\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[u] & \\
 & 5 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

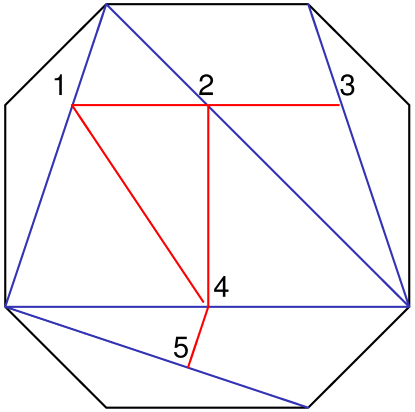
Graphe d'une triangulation : mutation

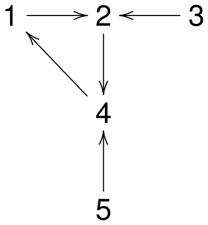


Graphe d'une triangulation : mutation



Graphe d’une triangulation : mutation

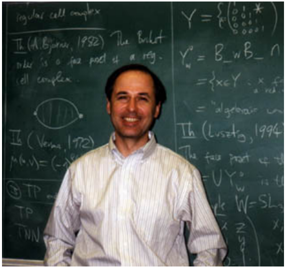




Mutation : définition générale (2000)

Mutation : définition générale (2000)

Andrei Zelevinsky



Sergey Fomin

Graine

Graine

Définition

$(Q, (x_1, x_2, \ldots, x_n))$, où

Graine

Définition

$(Q, (x_1, x_2, \ldots, x_n))$, où

- Q est un graphe orienté à n sommets, sans boucle ni 2-cycle.

Graine

Définition

$(Q, (x_1, x_2, \ldots, x_n))$, où

- Q est un graphe orienté à n sommets, sans boucle ni 2-cycle.
- les x_i sont des nombres ou des variables ("longueurs");

Graine

Définition

$(Q, (x_1, x_2, \ldots, x_n))$, où

- Q est un graphe orienté à n sommets, sans boucle ni 2-cycle.
- les x_i sont des nombres ou des variables (“longueurs”);

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"'] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}$$

Mutation du graphe

Mutation du graphe

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(Q)$ par :

Mutation du graphe

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(Q)$ par :

(a) Pour chaque configuration $i \to k \to j$ ajouter une flèche $i \to j$;

Mutation du graphe

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(Q)$ par :

(a) Pour chaque configuration $i \to k \to j$ ajouter une flèche $i \to j$;

(b) Effacer les 2-cycles crées par (a) (le cas échéant);

Mutation du graphe

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(Q)$ par :

(a) Pour chaque configuration $i \to k \to j$ ajouter une flèche $i \to j$;

(b) Effacer les 2-cycles crées par (a) (le cas échéant);

(c) Changer l'orientation de chaque flèche incidente à k.

Mutation du graphe

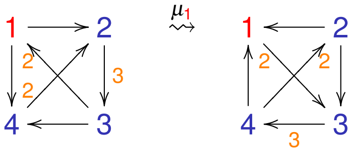
Définition

Pour $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(Q)$ par :

(a) Pour chaque configuration $i \to k \to j$ ajouter une flèche $i \to j$;

(b) Effacer les 2-cycles crées par (a) (le cas échéant);

(c) Changer l'orientation de chaque flèche incidente à k.



Mutation des variables

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

$$\mu_k(x_j) = x_j \qquad \text{si } j \neq k;$$

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

$$\begin{aligned} \mu_k(x_j) &= x_j \qquad \text{si } j \neq k; \\ \mu_k(x_k) &= \frac{\prod_{i \to k} x_i + \prod_{k \to j} x_j}{x_k}. \end{aligned}$$

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

$$\begin{aligned}
\mu_k(x_j) &= x_j \qquad \text{si } j \neq k; \\
\mu_k(x_k) &= \frac{\displaystyle\prod_{i \to k} x_i + \prod_{k \to j} x_j}{x_k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}$$

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

$$\begin{aligned} \mu_k(x_j) &= x_j \qquad \text{si } j \neq k; \\ \mu_k(x_k) &= \frac{\prod_{i \to k} x_i + \prod_{k \to j} x_j}{x_k}. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\ x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"'] \end{tikzcd}$$

$$\mu_1(x_1) = \frac{x_3^2 + x_2 x_4}{x_1}$$

Mutation des variables

Définition

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit $\mu_k(x_j)$ par :

$$
\begin{aligned}
\mu_k(x_j) &= x_j \qquad \text{si } j \neq k; \\
\mu_k(x_k) &= \frac{\prod_{i \to k} x_i + \prod_{k \to j} x_j}{x_k}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}
$$

$$\mu_1(x_1) = \frac{x_3^2 + x_2 x_4}{x_1}$$

$$\mu_3(x_3) = \frac{x_2^3 + x_1^2 x_4}{x_3}$$

Mutation d'une graine

Définition

Mutation d'une graine

Définition

$$\mu_k(Q,(x_1,\ldots,x_n)) = (\mu_k(Q),(\mu_k(x_1),\ldots,\mu_k(x_n)))$$

Mutation d'une graine

Définition

$$\mu_k(Q,(x_1,\ldots,x_n)) = (\mu_k(Q),(\mu_k(x_1),\ldots,\mu_k(x_n)))$$

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\ x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"'] \end{tikzcd} \quad \overset{\mu_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[dr, "2"] & x_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ x_4 \arrow[u] \arrow[ur, "2"'] & x_3 \arrow[l, "3"] \end{tikzcd}$$

Mutation d'une graine

Définition

$$\mu_k(Q, (x_1, \ldots, x_n)) = (\mu_k(Q), (\mu_k(x_1), \ldots, \mu_k(x_n)))$$

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\ x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"'] \end{tikzcd} \quad \overset{\mu_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[dr, "2"] & x_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ x_4 \arrow[u] \arrow[ur, "2"'] & x_3 \arrow[l, "3"] \end{tikzcd}$$

Le résultat est encore une graine.

Mutation d'une graine

Définition

$$\mu_k(Q, (x_1, \ldots, x_n)) = (\mu_k(Q), (\mu_k(x_1), \ldots, \mu_k(x_n)))$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mu_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\frac{x_3^2 + x_2 x_4}{x_1} \arrow[dr, "2"] & x_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
x_4 \arrow[u] \arrow[ur, "2"'] & x_3 \arrow[l, "3"]
\end{tikzcd}$$

Le résultat est encore une graine. La mutation μ_k est involutive.

Suite de Somos : le retour

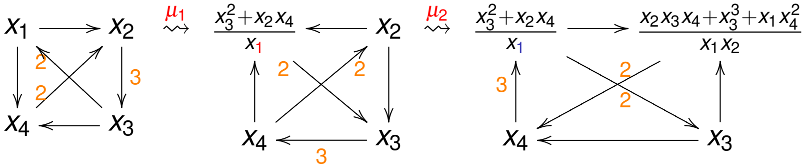
Suite de Somos : le retour

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}$$

Suite de Somos : le retour

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\ x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"'] \end{tikzcd} \quad \overset{\mu_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[dr, "2"] & x_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ x_4 \arrow[u] \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l, "3"] \end{tikzcd}$$

Suite de Somos : le retour

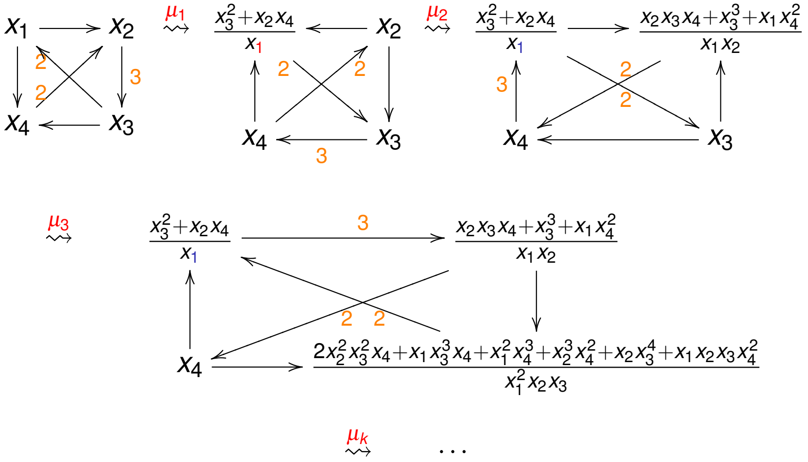


Suite de Somos : le retour

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[d, "3"] \\
x_4 \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l] \arrow[ul, "2"']
\end{tikzcd}
\overset{\mu_1}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}
\frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[dr, "2"] & x_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
x_4 \arrow[u] \arrow[ur, "2"] & x_3 \arrow[l, "3"]
\end{tikzcd}
\overset{\mu_2}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}
\frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[r] \arrow[dr, "2"] & \frac{x_2x_3x_4+x_3^3+x_1x_4^2}{x_1x_2} \arrow[dl, "2"'] \\
x_4 \arrow[u, "3"] & x_3 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\overset{\mu_3}{\rightsquigarrow}
\begin{tikzcd}
\frac{x_3^2+x_2x_4}{x_1} \arrow[r, "3"] & \frac{x_2x_3x_4+x_3^3+x_1x_4^2}{x_1x_2} \arrow[d] \arrow[dl, "2"'] \\
x_4 \arrow[u] \arrow[r] & \frac{2x_2^2x_3^2x_4+x_1x_3^3x_4+x_1^2x_4^3+x_2^3x_4^2+x_2x_3^4+x_1x_2x_3x_4^2}{x_1^2x_2x_3} \arrow[ul, "2"]
\end{tikzcd}
$$

Suite de Somos : le retour



Le phénomène de Laurent

Le phénomène de Laurent

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2002)

Le phénomène de Laurent

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2002)

- Quelle que soit la graine initiale, toutes les variables obtenues par une suite de mutations sont des polynômes de Laurent en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Le phénomène de Laurent

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2002)

- Quelle que soit la graine initiale, toutes les variables obtenues par une suite de mutations sont des polynômes de Laurent en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, toutes les nombres obtenus par une suite de mutations sont des entiers.

Le phénomène de Laurent

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2002)

- Quelle que soit la graine initiale, toutes les variables obtenues par une suite de mutations sont des polynômes de Laurent en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, toutes les nombres obtenus par une suite de mutations sont des entiers.

Conjecture

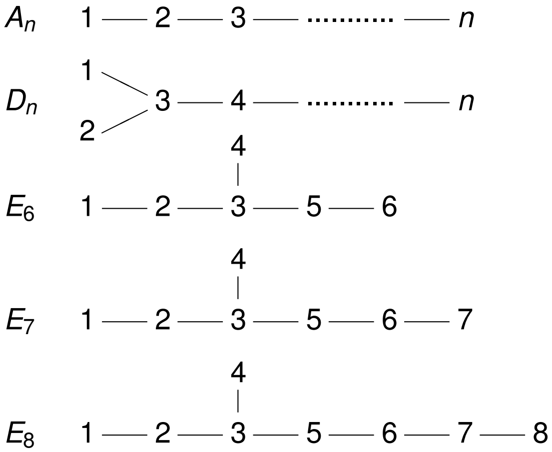
Les coefficients de ces polynômes de Laurent sont tous positifs.

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

L'ensemble des mutations d'une graine est fini si et seulement si une des graines de cet ensemble a pour graphe un graphe de Dynkin.

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

L'ensemble des mutations d'une graine est fini si et seulement si une des graines de cet ensemble a pour graphe un graphe de Dynkin.



Références

- S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras II: Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121.
- A. Zelevinsky, *What is a cluster algebra ?*, Notices of the AMS **54**, 11, (2007), 1494–1495.
- S. Fomin, *Cluster algebra portal*, `http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin`