Algèbres de Hecke et algèbres préprojectives

(Séminaire Chevalley)

Bernard LECLERC

24 Novembre 2005

1 Introduction

Soit H_n l'algèbre de Iwahori-Hecke associée au groupe p-adique $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. La paramétrisation de Deligne-Langlands des représentations irréductibles de dimension finie de H_n peut être décrite de la manière suivante (voir [**CG**, **L**, **KL2**]). On considère le groupe Γ engendré par F (= Frobenius) et M (= monodromie) soumis à la relation

$$FMF^{-1} = M^p. \tag{1}$$

On a alors une bijection entre les classes d'isomorphisme de H_n-modules simples de dimension finie et les classes d'isomorphisme de représentations complexes de Γ de dimension n dans lesquelles F est représenté par un élément semi-simple s et M par un élément unipotent u de $GL_n(\mathbb{C})$. On peut écrire $u = \exp x$, avec x nilpotent dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, et l'équation (1) devient

$$sxs^{-1} = px. \tag{2}$$

Il est connu que la catégorie H_n-mod se décompose en blocs correspondant aux multi-ensembles de valeurs propres de s. De plus, par induction, on peut se contenter de décrire les blocs "principaux" correspondant à un multi-ensemble de la forme

$$\mathscr{S} = \{p, \ldots, p, p^2, \ldots, p^2, \ldots, p^k, \ldots, p^k, \ldots\} \tag{3}$$

où pour $k \in \mathbb{N}^*$, p^k est répété m_k fois et $\sum_k m_k = n$. En écrivant x sous sa forme de Jordan, il est facile de voir que les classes d'isomorphisme de paires (s,x) comme ci-dessus pour lesquelles le spectre de s est égal à $\mathscr{S}$ sont en bijection naturelle avec les classes d'isomorphismes de représentations du carquois

$$Q: \quad 1 \to 2 \to \cdots \to k \to \cdots$$

de vecteur de dimension $\mathbf{m} = (m_k)_k$.

Ainsi, pour résumer, *la paramétrisation de Deligne-Langlands des modules simples contenus dans les blocs principaux de H_n-mod est donnée par les classes d'isomorphisme de représentations de Q de dimension totale n.*

Soit donc L un H_n-module simple, et ρ la représentation de Q correspondante. Une question naturelle est de savoir quelle information sur L est contenue dans ρ. Par exemple, peut-on calculer la dimension de L ou son caractère à partir de ρ ? La réponse est oui, mais c'est compliqué, et assez indirect. Après avoir rappelé comment on procède, je proposerai une autre méthode dans laquelle on remplace ρ par une représentation de l'algèbre préprojective de Q.

2 Analogue p-adique de la conjecture de Kazhdan-Lusztig

Fixons un vecteur de dimension $\mathbf{m}$ pour Q et notons $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ le bloc correspondant de H_n-mod. On introduit l'espace affine

$$E_{\mathbf{m}} = \bigoplus_{k\geqslant 1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^{m_{k+1}})$$

des représentations de Q de vecteur de dimension $\mathbf{m}$. Le groupe $G_{\mathbf{m}} = \prod_k GL(\mathbb{C}^{m_k})$ agit sur $E_{\mathbf{m}}$ "par conjugaison", et deux points de $E_{\mathbf{m}}$ sont sur la même $G_{\mathbf{m}}$-orbite si et seulement si ils donnent des représentations de Q isomorphes. Ainsi chaque module simple L dans le bloc $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ est associée à une $G_{\mathbf{m}}$-orbite $\mathscr{O}$ de $E_{\mathbf{m}}$, et on notera $L = L_{\mathscr{O}}$.

Il se trouve que le bloc $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ contient aussi une famille de modules induits, appelés modules standard, naturellement indexés par les $G_{\mathbf{m}}$-orbites de $E_{\mathbf{m}}$. On les notera $S_{\mathscr{O}}$. Le caractère de $S_{\mathscr{O}}$ est connu et facile à calculer, et tout revient donc à exprimer le caractère d'un module simple comme une combinaison linéaire de caractères de modules standard. Zelevinsky a conjecturé que les coefficients de cette combinaison linéaire étaient donnés par la géométrie des fermetures $\overline{\mathscr{O}}$ des $G_{\mathbf{m}}$-orbites [**Z**]. Comme les variétés de Schubert, les variétés $\overline{\mathscr{O}}$ sont en général singulières. Si $\mathscr{O}'$ est contenue dans la fermeture de $\mathscr{O}$, on note $\chi_{\mathrm{IC}}(\mathscr{O}, \mathscr{O}')$ la caractéristique d'Euler de la cohomologie d'intersection locale de $\overline{\mathscr{O}}$ en un point de $\mathscr{O}'$. La conjecture de Zelevinsky dit alors que, dans le groupe de Grothendieck de $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$,

$$[S_{\mathscr{O}'}] = \sum_{\mathscr{O}} \chi_{\mathrm{IC}}(\mathscr{O}, \mathscr{O}')\,[L_{\mathscr{O}}]. \tag{4}$$

Cette conjecture a été prouvée par Ginzburg [**CG**].

Pour en déduire $[L_{\mathscr{O}}]$, il faut donc calculer la cohomologie d'intersection de toutes les variétés $\overline{\mathscr{O}'}$ telles que $\mathscr{O}' \subset \overline{\mathscr{O}}$, puis inverser le système linéaire (4). C'est pourquoi je considère cette réponse comme compliquée et indirecte.

3 Algèbre préprojective

On introduit le carquois $\overline{Q}$ obtenu en rajoutant à Q des flèches allant de droite à gauche

$$\overline{Q}: \quad 1 \underset{\alpha_1}{\overset{\alpha_1^*}{\leftrightarrows}} 2 \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_2^*}{\leftrightarrows}} \cdots \leftrightarrows k-1 \underset{\alpha_{k-1}}{\overset{\alpha_{k-1}^*}{\leftrightarrows}} k \underset{\alpha_k}{\overset{\alpha_k^*}{\leftrightarrows}} k+1 \leftrightarrows \cdots$$

L'espace affine

$$\overline{E}_{\mathbf{m}} = \bigoplus_{k\geqslant 1} \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^{m_{k+1}}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_{k+1}}, \mathbb{C}^{m_k})\right)$$

est la variété des représentations de $\overline{Q}$ de vecteur de dimension $\mathbf{m} = (m_k)_k$.

On note I l'idéal bilatère de l'algèbre $\mathbb{C}\overline{Q}$ des chemins sur $\overline{Q}$ engendré par les éléments

$$\alpha_1^*\alpha_1,\ \ \alpha_2^*\alpha_2 - \alpha_1\alpha_1^*,\ \ \ldots,\ \ \alpha_k^*\alpha_k - \alpha_{k-1}\alpha_{k-1}^*,\ \ \ldots.$$

L'algèbre préprojective est l'algèbre quotient $\Lambda = \mathbb{C}\overline{Q}/I$. La variété des représentations de Λ de dimension $\mathbf{m}$ est la variété affine

$$\Lambda_{\mathbf{m}} = \{x = (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k^*})_k \in \overline{E}_{\mathbf{m}} \mid x_{\alpha_1^*}x_{\alpha_1} = 0,\ \ldots,\ x_{\alpha_k^*}x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k-1}}x_{\alpha_{k-1}^*} = 0,\ \ldots\}.$$

L'action du groupe $G_{\mathbf{m}}$ sur $E_{\mathbf{m}}$ se prolonge naturellement à $\overline{E}_{\mathbf{m}}$ et préserve la sous-variété $\Lambda_{\mathbf{m}}$. Mais, alors que $E_{\mathbf{m}}$ se décompose en un nombre fini d'orbites sous l'action de $G_{\mathbf{m}}$, la variété $\Lambda_{\mathbf{m}}$ contient en général un nombre infini de $G_{\mathbf{m}}$-orbites.

On a une projection naturelle $\pi : \Lambda_{\mathbf{m}} \to E_{\mathbf{m}}$ donnée par $\pi((x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k^*})_k) = (x_{\alpha_k})_k$. Lusztig a montré que pour toute orbite $\mathscr{O}$ de $E_{\mathbf{m}}$, la sous-variété

$$Z_{\mathscr{O}} = \overline{\pi^{-1}(\mathscr{O})}$$

est une composante irréductible de $\Lambda_{\mathbf{m}}$. Par exemple, si $\mathscr{O}$ est l'orbite ouverte $Z_{\mathscr{O}}$ n'est autre que $E_{\mathbf{m}}$, et si $\mathscr{O}$ est l'orbite nulle $Z_{\mathscr{O}}$ s'identifie à la variété $E^*_{\mathbf{m}}$ des représentations de dimension $\mathbf{m}$ du carquois

$$Q^* : \quad 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow k \leftarrow \cdots$$

Ainsi, on a une nouvelle paramétrisation $Z \mapsto L_Z$ des H_n-modules simples du bloc $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ par les composantes irréductibles de la variété $\Lambda_{\mathbf{m}}$. Il me semble que cette paramétrisation présente des avantages, et je vais maintenant expliquer pourquoi.

4 Λ-modules rigides

J'ai dit que $\Lambda_{\mathbf{m}}$ avait en général un nombre infini d'orbites. Certaines de ses composantes irréductibles ont toutefois un nombre fini d'orbites, par exemple $E_{\mathbf{m}}$ et $E^*_{\mathbf{m}}$. Ces composantes ont alors nécessairement une orbite ouverte.

Il se trouve qu'on peut caractériser de manière homologique les Λ-modules $x \in \Lambda_{\mathbf{m}}$ dont l'orbite sous $G_{\mathbf{m}}$ est ouverte. Ce sont les modules rigides, c'est à dire tels que

$$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(x,x) = 0.$$

Dans ce cas il est raisonnable de penser que x est un bon “représentant” de sa composante irréductible.

Posons $V_{\mathbf{m}} = \bigoplus_k \mathbb{C}^{m_k}$ et voyons-le comme un espace vectoriel gradué dont la k-ième composante homogène est $\mathbb{C}^{m_k}$. Notons $\mathscr{F}_{\mathbf{m}}$ la variété des drapeaux (complets) de sous-espaces gradués de $V_{\mathbf{m}}$, et $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}$ la sous-variété de $\mathscr{F}_{\mathbf{m}}$ formée des drapeaux laissés stables par x. Je propose la

Conjecture 1 *Soit $x \in \Lambda_{\mathbf{m}}$ un module rigide, Z sa composante irréductible, et L_Z le H_n-module correspondant. On a*

$$\dim L_Z = \chi(\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}),$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler (ordinaire).

On peut raffiner cette conjecture en une formule de caractère. Pour cela rappelons comment on définit le caractère d'un H_n-module. L'algèbre H_n contient une sous-algèbre commutative maximale engendrée par des éléments X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ correspondant aux poids ε_i de la représentation naturelle de $GL_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in H_n$-mod, on a une décomposition en sous-espaces propres généralisés

$$M = \bigoplus_{\gamma} M[\gamma],$$

où pour $\gamma = (\gamma_i) \in \mathbb{C}^n$ on pose

$$M[\gamma] = \{m \in M \mid \text{pour tout } i, (X_i - \gamma_i)^{k_i} m = 0 \text{ pour } k_i \gg 0\}.$$

Les γ pour lesquels $M[\gamma] \neq 0$ s'appellent les poids de M. On définit alors le caractère formel de M par

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\gamma} \dim M[\gamma]\, \gamma.$$

Revenons maintenant au bloc principal $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$. Il est facile de voir que M appartient à ce bloc si et seulement si tous ses poids sont des permutations du multi-ensemble $\mathscr{S}$ de l'équation (3), autrement dit sont de la forme $\gamma = (p^{d_i})$, où la suite $\mathbf{d} = (d_i)$ contient, pour chaque k, m_k termes égaux à k. Pour une telle suite j'écrirai $M[\mathbf{d}]$ au lieu de $M[\gamma]$.

Par ailleurs, on dira qu'un drapeau de sous-espaces gradués de $V_{\mathbf{m}}$ est de type $\mathbf{d}$ si il admet une base adaptée (b_i) telle que b_i est de degré d_i pour tout i. Notons $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[\mathbf{d}]$ la sous-variété de $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}$ formée des drapeaux de type $\mathbf{d}$.

Conjecture 2 *Soit $x \in \Lambda_{\mathbf{m}}$ un module rigide, Z sa composante irréductible, et L_Z le H_n-module correspondant. On a, pour toute suite $\mathbf{d}$,*

$$\dim L_Z[\mathbf{d}] = \chi(\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[\mathbf{d}]).$$

Example 3 Prenons $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 1,\ m_k = 0\ (k \geqslant 4)$. Soit ρ la représentation de Q de dimension $\mathbf{m}$ donnée par:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}} \mathbb{C}$$

Soit $\mathscr{O}$ la $G_{\mathbf{m}}$ orbite de ρ, $Z_{\mathscr{O}}$ la composante irréductible de $\Lambda_{\mathbf{m}}$ correspondante. Le Λ-module x:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, shift left, "\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}"] & \mathbb{C}^2 \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] \arrow[r, shift left, "\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

est rigide sur $Z_{\mathscr{O}}$. On voit facilement que la variété $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}$ se décompose en 4 sous-variétés, à savoir, les variétés $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[1,2,3,2]$ et $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[3,2,1,2]$ qui sont réduites à un point, et les variétés $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[1,3,2,2]$ et $\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[3,1,2,2]$ qui sont isomorphes à des droites projectives. Dans ce cas, la conjecture est vérifiée (voir plus bas). Ainsi le H_4-module correspondant est de dimension 6, et son caractère est égal à

$$[1,2,3,2] + [3,2,1,2] + 2\,[1,3,2,2] + 2\,[3,1,2,2],$$

en écrivant $[i,j,k,l]$ au lieu de $[p^i, p^j, p^k, p^l]$. $\diamond$

Sur quoi reposent ces conjectures ? L'idée est la suivante. Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures strictes de taille m. Lusztig a donné 2 constructions géométriques de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{n})$. La première est en termes de faisceaux constructibles $G_{\mathbf{m}}$-équivariants sur les variétés $E_{\mathbf{m}}$, et elle conduit à une base B dite canonique de $U(\mathfrak{n})$. La deuxième est en termes de fonctions constructibles $G_{\mathbf{m}}$-équivariantes sur les variétés $\Lambda_{\mathbf{m}}$ et elle conduit à une base S dite semi-canonique de $U(\mathfrak{n})$. Soit $U(\mathfrak{n})^*$ le dual gradué de $U(\mathfrak{n})$. On dispose donc de deux bases B^* et S^* de $U(\mathfrak{n})^*$.

Si m est suffisamment grand (supérieur au nombre de composantes non nulles de $\mathbf{m}$), on peut identifier le groupe de Grothendieck (complexifié) du bloc $\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ au sous-espace de poids $\mathbf{m}$ de $U(\mathfrak{n})^*$. En effet, le théorème de Gabriel montre que ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. L'équation (4) montre alors que si l'on identifie les classes des modules standard aux éléments d'une base de Poincaré-Birkoff-Witt duale appropriée, les classes des modules simples s'identifient aux éléments de la base B^* de ce sous-espace. En effet, les coefficients de la matrice de passage entre ces deux bases sont donnés par les mêmes entiers $\chi_{\mathrm{IC}}(\mathscr{O},\mathscr{O}')$. Soit alors $M\in\mathscr{B}_{\mathbf{m}}$ et ψ_M l'élément de $U(\mathfrak{n})^*$ correspondant. On peut vérifier [**Le**] que

$$\dim M[\mathbf{d}] = \psi_M(e_{\mathbf{d}}), \tag{5}$$

où pour $\mathbf{d}=(d_i)$, on note $e_{\mathbf{d}}$ le produit $e_{d_1}e_{d_2}\cdots$ de générateurs de Chevalley de $U(\mathfrak{n})$.

Dans la deuxième construction de Lusztig, le produit $e_{\mathbf{d}}$ s'identifie à la fonction constructible sur $\Lambda_{\mathbf{m}}$ donnée par

$$x\mapsto \chi(\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[\mathbf{d}]).$$

Par ailleurs, pour $x\in\Lambda_{\mathbf{m}}$ on a la forme linéaire $\delta_x\in U(\mathfrak{n})^*$ qui à une fonction constructible f sur $\Lambda_{\mathbf{m}}$ associe sa valeur en x. Ainsi

$$\delta_x(e_{\mathbf{d}}) = \chi(\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[\mathbf{d}]).$$

Les éléments de la base S^* sont justement de telles formes linéaires. Plus précisément, sur chaque composante irréductible Z de $\Lambda_{\mathbf{m}}$ on choisit un “point générique” x_Z et l'élément de S^* est égal à δ_{x_Z}. Si Z a une orbite ouverte, les points de cette orbite sont génériques, autrement dit, si x est un module rigide δ_x appartient à S^*.

Cette discussion montre que la Conjecture 2 est équivalente à la conjecture suivante, formulée dans un travail commun avec Christof Geiss et Jan Schröer [**GLS2**].

Conjecture 4 *Soit x un Λ-module rigide. L'élément δ_x de la base semi-canonique duale S^* appartient aussi à la base canonique duale B^*.*

Nous avons prouvé la Conjecture 4 dans certains cas particuliers. Supposons que $\mathbf{m}=(m_k)$ ait au plus 4 composantes m_k non nulles. Alors $\Lambda_{\mathbf{m}}$ n'a qu'un nombre fini d'orbites (cela vient de ce que l'algèbre préprojective de type A_4 est de type de représentation fini). Dans ce cas nous avons montré que $B^*=S^*$ [**GLS1**]. Plus généralement, si $\mathbf{m}$ n'a aucun groupe de 5 composantes consécutives toutes non nulles, on peut se ramener à la situation précédente.

Récemment, nous avons démontré que, dans l'identification naturelle de $U(\mathfrak{n})^*$ avec l'algèbre $\mathbb{C}[N]$ des fonctions polynomiales sur le groupe des matrices unitriangulaires, les δ_x pour x rigide s'identifient aux monômes cluster de Fomin et Zelevinsky. Ainsi il existe un algorithme combinatoire, basé sur les mutations de cluster, pour calculer les caractéristiques d'Euler $\chi(\mathscr{F}_{\mathbf{m},x}[\mathbf{d}])$ lorsque x est rigide.

5 Cas général

Dans [**GLS1**] nous avons montré qu'en général les bases S^* et B^* diffèrent. Voici, apparemment, le plus petit exemple.

Example 5 Soit $\mathbf{m}=(2,4,4,4,2,0,\ldots)$. Soit ρ la représentation de Q de dimension $\mathbf{m}$ donnée par

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}} \mathbb{C}^2$$

Soit $\mathscr{O}$ l'orbite de ρ, Z la composante irréductible de $\Lambda_{\mathbf{m}}$ associée. L'élément de S^* indexé par Z est la somme de deux éléments de B^*.

Le H_{16}-module irréductible correspondant est de dimension 814 773 960 !! $\diamond$

Il se trouve que dans l'exemple ci-dessus, et aussi dans d'autres exemples similaires, on peut trouver un point x de Z tel que δ_x soit l'élément de B^* voulu. Evidemment, puisque ce δ_x n'appartient pas à S^*, le point x n'est pas générique sur Z. Néanmoins, le résultat de la Conjecture 2 reste valable pour ce choix de x.

On peut donc espérer qu'il existe sur toute composante irréductible Z de $\Lambda_{\mathbf{m}}$ un "bon représentant" x qui fasse fonctionner les conjectures. Cela donnerait une nouvelle approche de la base canonique, en termes de Λ et de fonctions constructibles.

References

[**CG**] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser 1997.

[**GLS1**] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **38** (2005), 193–253.

[**GLS2**] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Preprint 2005.

[**KL1**] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras. II*, Inventiones Math. **80** (1985), 209–231.

[**KL2**] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Inventiones Math. **80** (1985), 209–231.

[**Le**] B. Leclerc, *Dual canonical bases, quantum shuffles and q-characters*, Math. Z. **246** (2004), 691–732.

[**L**] G. Lusztig, *Some examples of square integrable representations of semisimple p-adic groups*, Trans. A.M.S. **277** (1983), 623–653.

[**Z**] A. Zelevinsky, *A p-adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Funkts. Anal. Prilozh. **15** (1981), 9–21.