Alain Lascoux: De la géométrie à la combinatoire

Bernard Leclerc
Université de Caen

Séminaire d'épistémologie
et d'histoire des idées mathématiques

I.H.P. Paris, 04/02/2015

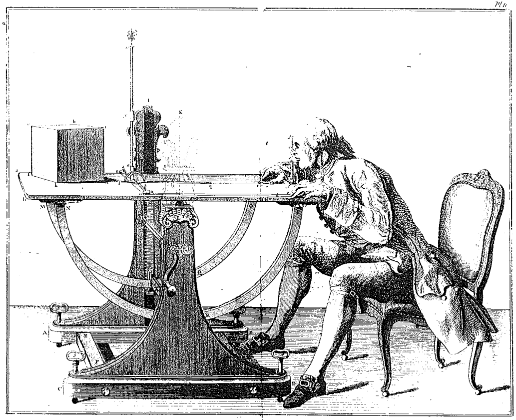
A la mémoire d'Alain Lascoux (1944–2013)

Il est extrêmement utile de connaître les vraies origines des découvertes mémorables.

Ce n’est pas tant pour pouvoir attribuer à chacun ses propres découvertes, que pour étendre l’art de faire des découvertes en en considérant des exemples remarquables.

G. W. Leibniz,
Historia et Origo Calculi Differentialis.

Le tirage de cette thèse a été assuré par les techniciennes
de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Paris VII,
Mesdames Barrier et Gilbert .



SOMMAIRE

♦♦♦♦♦♦♦♦

♦♦♦♦♦

L’espace projectif

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.

L’espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n-1$.

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n-1$.
- Alors $\Omega_{n-1} := \{D \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \mid \dim(D \cap H) = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \mathbb{P}(H)$.

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n - 1$.
- Alors $\Omega_{n-1} := \{D \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \mid \dim(D \cap H) = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \mathbb{P}(H)$.
- D'où la décomposition cellulaire :
  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \Omega_{n-2} \sqcup \cdots \sqcup \Omega_1 \sqcup \Omega_0, \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cong \mathbb{C}^i \cong \mathbb{R}^{2i}$.

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n-1$.
- Alors $\Omega_{n-1} := \{D \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \mid \dim(D \cap H) = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \mathbb{P}(H)$.
- D'où la décomposition cellulaire : $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \Omega_{n-2} \sqcup \cdots \sqcup \Omega_1 \sqcup \Omega_0, \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cong \mathbb{C}^i \cong \mathbb{R}^{2i}$.
- Nombres de Betti : $\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, 2, \ldots, 2(n-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n-1$.
- Alors $\Omega_{n-1} := \{D \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \mid \dim(D \cap H) = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \mathbb{P}(H)$.
- D'où la décomposition cellulaire : $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \Omega_{n-2} \sqcup \cdots \sqcup \Omega_1 \sqcup \Omega_0, \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cong \mathbb{C}^i \cong \mathbb{R}^{2i}$.
- Nombres de Betti : $\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, 2, \ldots, 2(n-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Soit $X_i := \overline{\Omega_{n-1-i}}$. On a $H^{2i}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}[X_i]$, où $[X_i]$ est la classe fondamentale de X_i.

L'espace projectif

- $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \{D \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(D) = 1\}$.
- Fixons $H \subset \mathbb{C}^n$, $\dim(H) = n-1$.
- Alors $\Omega_{n-1} := \{D \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \mid \dim(D \cap H) = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \mathbb{P}(H)$.
- D'où la décomposition cellulaire : $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = \Omega_{n-1} \sqcup \Omega_{n-2} \sqcup \cdots \sqcup \Omega_1 \sqcup \Omega_0, \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cong \mathbb{C}^i \cong \mathbb{R}^{2i}$.
- Nombres de Betti : $\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, 2, \ldots, 2(n-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Soit $X_i := \overline{\Omega_{n-1-i}}$. On a $H^{2i}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}[X_i]$, où $[X_i]$ est la classe fondamentale de X_i.
- Homomorphisme d'anneaux $\Phi : \mathbb{Z}[x] \twoheadrightarrow H^*(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n))$ donné par $\Phi(x) = [X_1]$ et $\mathrm{Ker}(\Phi) = (x^n)$.

La Grassmannienne

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$, $\dim(V_i) = i$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$. On définit :
  $X_\lambda := \{W \in \mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) \mid \dim(W \cap V_{n-m+i-\lambda_i}) \geq i,\ 1 \leq i \leq m\}$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m,\mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$, $\dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$. On définit :
  $X_\lambda := \{W \in \mathbb{G}(m,\mathbb{C}^n) \mid \dim(W \cap V_{n-m+i-\lambda_i}) \geq i,\ 1 \leq i \leq m\}$.
- X_λ est une sous-variété de codimension $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ (variété de Schubert).

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$, $\dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$. On définit : $X_\lambda := \{W \in \mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) \mid \dim(W \cap V_{n-m+i-\lambda_i}) \geq i,\ 1 \leq i \leq m\}$.
- X_λ est une sous-variété de codimension $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ (variété de Schubert).
- On a : $H^{2i}(\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n)) = \bigoplus_{|\lambda|=i} \mathbb{Z}[X_\lambda]$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$, $\dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$. On définit :
$X_\lambda := \{W \in \mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) \mid \dim(W \cap V_{n-m+i-\lambda_i}) \geq i,\ 1 \leq i \leq m\}$.
- X_λ est une sous-variété de codimension $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ (variété de Schubert).
- On a : $H^{2i}(\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n)) = \bigoplus_{|\lambda|=i} \mathbb{Z}[X_\lambda]$.
- Homomorphisme d'anneaux
$\Phi_m : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m} \twoheadrightarrow H^*(\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n))$.

La Grassmannienne

- $\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \dim(W) = m\}$.
- Fixons $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n, \dim(V_i) = i$.
- Soit $n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$. On définit : $X_\lambda := \{W \in \mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n) \mid \dim(W \cap V_{n-m+i-\lambda_i}) \geq i,\ 1 \leq i \leq m\}$.
- X_λ est une sous-variété de codimension $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ (variété de Schubert).
- On a : $H^{2i}(\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n)) = \bigoplus_{|\lambda|=i} \mathbb{Z}[X_\lambda]$.
- Homomorphisme d'anneaux $\Phi_m : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m} \twoheadrightarrow H^*(\mathbb{G}(m, \mathbb{C}^n))$.
- $[X_\lambda] = \Phi_m(s_\lambda)$, où $s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \det\left(x_j^{\lambda_i+i-1}\right)/\det\left(x_j^{i-1}\right)$, (polynôme de Schur).

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286 (27 février 1978) Série A — 385

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Classes de Chern d'un produit tensoriel.*
Note (*) de **Alain Lascoux,** présentée par M. Henri Cartan.

Nous donnons l'expression explicite des classes de Chern d'un produit tensoriel de deux fibrés vectoriels, ainsi que celles de la puissance extérieure et de la puissance symétrique deuxièmes.

We give the explicit formula for a tensor product of vector bundles, and for the second symmetric and exterior power.

On a souvent besoin en géométrie, par exemple pour le calcul des singularités dites de Thom-Boardman dès le deuxième ordre, de l'expression des classes de Chern d'un produit tensoriel et d'un produit symétrique. Le calcul se révèle vite impraticable par la méthode usuelle [*cf.* ([5])], alors que la théorie classique des fonctions de Schur permet de le mener à bien; nous renvoyons à ([1]) pour les développements récents.

1. Produit tensoriel. — Soient E un fibré vectoriel complexe de rang m et $c(\mathrm{E})=1+c_1(\mathrm{E})+\ldots+c_m(\mathrm{E})$ sa classe de Chern dans un anneau de cohomologie convenable. Rappelons qu'on peut décomposer formellement $c(\mathrm{E})$ en un produit de m facteurs : $c(\mathrm{E})=(1+a)(1+b)\ldots$, de sorte que les $c_i(\mathrm{E})$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les $a, b\ldots$ On écrira $c(\mathrm{E})=\Pi_{a\in\mathrm{E}}(1+a)$. On préfère utiliser les classes de

Classes de Chern d’un produit tensoriel

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.
- $c(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$, où les x_i sont les racines de Chern de E.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.
- $c(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$, où les x_i sont les racines de Chern de E.
- $c_k(E) = e_k(x_1, \ldots, x_m)$, k-ième polynôme symétrique élémentaire en les x_i.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.
- $c(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$, où les x_i sont les racines de Chern de E.
- $c_k(E) = e_k(x_1, \ldots, x_m)$, k-ième polynôme symétrique élémentaire en les x_i.
- F, un autre fibré vectoriel de rang n sur X.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.
- $c(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$, où les x_i sont les racines de Chern de E.
- $c_k(E) = e_k(x_1, \ldots, x_m)$, k-ième polynôme symétrique élémentaire en les x_i.
- F, un autre fibré vectoriel de rang n sur X.
- $c(F) = \prod_{i=1}^{n}(1 + y_j)$, où les y_j sont les racines de Chern de F.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- E, un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété X.
- $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_m(E) \in H^*(X)$, sa classe de Chern totale.
- $c(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$, où les x_i sont les racines de Chern de E.
- $c_k(E) = e_k(x_1, \ldots, x_m)$, k-ième polynôme symétrique élémentaire en les x_i.
- F, un autre fibré vectoriel de rang n sur X.
- $c(F) = \prod_{i=1}^{n}(1 + y_j)$, où les y_j sont les racines de Chern de F.

Problème

Calculer les classes de Chern de $E \otimes F$ en termes des classes de Chern de E et de F.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Les propriétés des classes de Chern impliquent :
$$c(E \otimes F) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 + x_i + y_j).$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Les propriétés des classes de Chern impliquent :

$$c(E \otimes F) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 + x_i + y_j).$$

- En particulier, la classe de Chern de degré maximum est :

$$c_{mn}(E \otimes F) = \prod_{i,j} (x_i + y_j) = (y_1 \cdots y_n)^m \prod_{i,j} (1 + x_i/y_j).$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Les propriétés des classes de Chern impliquent :
$$c(E \otimes F) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 + x_i + y_j).$$
- En particulier, la classe de Chern de degré maximum est :
$$c_{mn}(E \otimes F) = \prod_{i,j} (x_i + y_j) = (y_1 \cdots y_n)^m \prod_{i,j} (1 + x_i/y_j).$$
- En écrivant $y^* = (1/y_1, \ldots, 1/y_n)$, on a
$$e_k(y^*) = e_{n-k}(y)/(y_1 \cdots y_n).$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Les propriétés des classes de Chern impliquent :
$$c(E\otimes F)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_i+y_j).$$
- En particulier, la classe de Chern de degré maximum est :
$$c_{mn}(E\otimes F)=\prod_{i,j}(x_i+y_j)=(y_1\cdots y_n)^m\prod_{i,j}(1+x_i/y_j).$$
- En écrivant $y^*=(1/y_1,\ldots,1/y_n)$, on a
$$e_k(y^*)=e_{n-k}(y)/(y_1\cdots y_n).$$
- Etant donnée une partition $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m)\subseteq(n^m)$, soit
$$\lambda^*:=(n-\lambda_m\geq n-\lambda_{m-1}\geq\cdots\geq n-\lambda_1).$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Par la "formule de Cauchy",

$$c_{mn}(E \otimes F) = \prod_{i,j}(x_i + y_j) = \sum_{\lambda \subseteq (n^m)} s_\lambda(x) s_{(\lambda^*)'}(y).$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- Par la "formule de Cauchy",

$$c_{mn}(E\otimes F)=\prod_{i,j}(x_i+y_j)=\sum_{\lambda\subseteq(n^m)} s_\lambda(x)s_{(\lambda^*)'}(y).$$

- Le même calcul donne :

$$c(E\otimes F)=\prod_{i,j}((1+x_i)+y_j)=\sum_{\lambda\subseteq(n^m)} s_\lambda(1+x)s_{(\lambda^*)'}(y),$$

où

$$s_\lambda(1+x):=s_\lambda(1+x_1,\ldots,1+x_m)=\frac{a_{\lambda+\delta}(1+x_1,\ldots,1+x_m)}{a_\delta(1+x_1,\ldots,1+x_m)}.$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- $a_\delta(1+x_1,\ldots,1+x_m) = a_\delta(x_1,\ldots,x_m)$.

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- $a_\delta(1+x_1,\ldots,1+x_m) = a_\delta(x_1,\ldots,x_m)$.
- Comme $(1+x_i)^{\lambda_j+m-j} = \sum_k \binom{\lambda_j+m-j}{k} x_i^k$, on a

$$a_{\lambda+\delta}(1+x_1,\ldots,1+x_m) = \sum_{\mu\subseteq\lambda} d_{\lambda\mu}\, a_{\mu+\delta}(x_1,\ldots,x_m),$$

où :

$$d_{\lambda\mu} := \det\left(\binom{\lambda_j+m-j}{\mu_i+m-i}\right)_{1\leq i,j\leq m}.$$

Classes de Chern d'un produit tensoriel

- $a_\delta(1+x_1,\dots,1+x_m) = a_\delta(x_1,\dots,x_m)$.
- Comme $(1+x_i)^{\lambda_j+m-j} = \sum_k \binom{\lambda_j+m-j}{k} x_i^k$, on a

$$a_{\lambda+\delta}(1+x_1,\dots,1+x_m) = \sum_{\mu\subseteq\lambda} d_{\lambda\mu} a_{\mu+\delta}(x_1,\dots,x_m),$$

où :

$$d_{\lambda\mu} := \det\left(\binom{\lambda_j+m-j}{\mu_i+m-i}\right)_{1\le i,j\le m}.$$

Théorème (Lascoux 1978)

$$c(E\otimes F) = \sum_{\mu\subseteq\lambda\subseteq(n^m)} d_{\lambda\mu} s_\mu(x) s_{(\lambda^*)'}(y).$$

Lascoux et Chern

Les géomètres algébristes, en premier lieu Grothendieck, ont introduit le cadre adéquat pour l'étude les polynômes symétriques.

Les géomètres algébristes, en premier lieu Grothendieck, ont introduit le cadre adéquat pour l'étude les polynômes symétriques.

Ils ne s'en sont guère servis pour des calculs explicites, qui n'étaient pas leur propos.

Les géomètres algébristes, en premier lieu Grothendieck, ont introduit le cadre adéquat pour l'étude les polynômes symétriques.

Ils ne s'en sont guère servis pour des calculs explicites, qui n'étaient pas leur propos.

On trouve chez eux plutôt des formulations du type :

"il existe des polynômes symétriques universels ..."

Les géomètres algébristes, en premier lieu Grothendieck, ont introduit le cadre adéquat pour l'étude les polynômes symétriques.

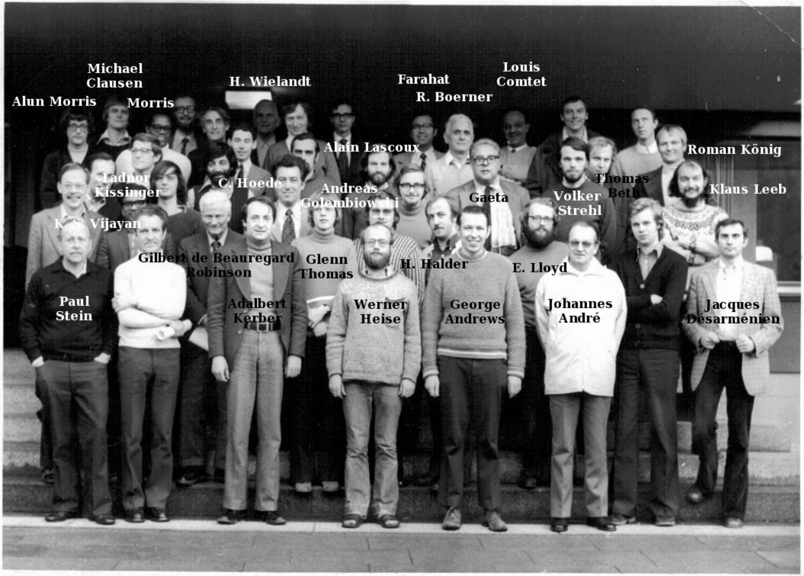
Ils ne s'en sont guère servis pour des calculs explicites, qui n'étaient pas leur propos.

On trouve chez eux plutôt des formulations du type :

"il existe des polynômes symétriques universels ..."

Alain Lascoux,

Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Strasbourg 1976.


Michael Clausen
H. Wielandt
Farahat
Louis Comtet
Alun Morris
Morris
R. Boerner
Alain Lascoux
Roman König
Ladnor Kissinger
C. Hoede
Andreas Golembiowski
Gaeta
Volker Strehl
Thomas Beth
Klaus Leeb
K. S. Vijayan
Gilbert de Beauregard Robinson
Glenn Thomas
H. Halder
E. Lloyd
Paul Stein
Adalbert Kerber
Werner Heise
George Andrews
Johannes André
Jacques Désarménien

Polynômes de Schubert

Polynômes de Schubert

- $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$.

Polynômes de Schubert

- $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$.
- Pour $1 \leq i < n$, opérateur de différence divisée $\partial_i : R[x] \to R[x]$

$$(\partial_i f)(x) := \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}$$

Polynômes de Schubert

- $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$.
- Pour $1 \leq i < n$, opérateur de différence divisée $\partial_i : R[x] \to R[x]$

$$(\partial_i f)(x) := \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}$$

- Ils satisfont les relations:

$$\begin{array}{rcll} \partial_i^2 & = & 0, & \\ \partial_i \partial_j & = & \partial_j \partial_i & \text{if } |i-j| \geq 1, \\ \partial_i \partial_j \partial_i & = & \partial_j \partial_i \partial_j & \text{if } |i-j| = 1. \end{array}$$

Polynômes de Schubert

- $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$.
- Pour $1 \leq i < n$, opérateur de différence divisée $\partial_i : R[x] \to R[x]$

$$(\partial_i f)(x) := \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}$$

- Ils satisfont les relations:

$$\begin{array}{lcll} \partial_i^2 & = & 0, & \\ \partial_i \partial_j & = & \partial_j \partial_i & \text{if } |i - j| \geq 1, \\ \partial_i \partial_j \partial_i & = & \partial_j \partial_i \partial_j & \text{if } |i - j| = 1. \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ opérateur bien défini ∂_w pour $w \in S_n$.

Polynômes de Schubert

- $R[x] := R[x_1, \ldots, x_n]$.
- Pour $1 \leq i < n$, opérateur de différence divisée $\partial_i : R[x] \to R[x]$

$$(\partial_i f)(x) := \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}$$

- Ils satisfont les relations:

$$\begin{array}{rcll} \partial_i^2 & = & 0, & \\ \partial_i \partial_j & = & \partial_j \partial_i & \text{if } |i-j| \geq 1, \\ \partial_i \partial_j \partial_i & = & \partial_j \partial_i \partial_j & \text{if } |i-j| = 1. \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ opérateur bien défini ∂_w pour $w \in S_n$.

- $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $R := \mathbb{Z}[y]$, $R[x] = \mathbb{Z}[x, y]$.

Schubert polynomials

- w_0, l'élément le plus long de S_n.

Schubert polynomials

- w_0, l'élément le plus long de S_n.
- $\Delta(x,y) := \prod_{i+j\leq n}(x_i - y_j)$.

Schubert polynomials

- w_0, l'élément le plus long de S_n.
- $\Delta(x,y) := \prod_{i+j\leq n}(x_i - y_j)$.

Définition (Lascoux-Schützenberger, 1982)

Pour $w \in S_n$, on définit

$$\mathfrak{S}_w(x,y) := \partial_{w^{-1}w_0}(\Delta(x,y)) \in \mathbb{Z}[x,y],$$

où les différences divisées agissent seulement sur x.

Schubert polynomials

- w_0, l'élément le plus long de S_n.
- $\Delta(x,y) := \prod_{i+j\leq n}(x_i - y_j)$.

Définition (Lascoux-Schützenberger, 1982)

Pour $w \in S_n$, on définit

$$\mathfrak{S}_w(x,y) := \partial_{w^{-1}w_0}(\Delta(x,y)) \in \mathbb{Z}[x,y],$$

où les différences divisées agissent seulement sur x.

- Polynômes de Schubert simples :

$$\mathfrak{S}_w(x) := \mathfrak{S}_w(x,0).$$

Polynômes de Schubert $(n = 3)$

$$
\begin{tikzcd}
 & (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1) \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_2"] & \\
(x_1 - y_1)(x_2 - y_1) \arrow[d, "\partial_2"] & & (x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \arrow[d, "\partial_1"] \\
x_1 - y_1 \arrow[dr, "\partial_1"] & & x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \arrow[dl, "\partial_2"] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Polynômes de Schubert $(n = 3)$

$$
\begin{tikzcd}
 & (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1) \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_2"] & \\
(x_1 - y_1)(x_2 - y_1) \arrow[d, "\partial_2"] & & (x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \arrow[d, "\partial_1"] \\
x_1 - y_1 \arrow[dr, "\partial_1"] & & x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \arrow[dl, "\partial_2"'] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

- symétrie x-y : $\quad \mathfrak{S}_w(y, x) = (-1)^{\ell(w)} \mathfrak{S}_{w^{-1}}(x, y).$

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par les polynômes symétriques de degré > 0.

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par les polynômes symétriques de degré > 0. Des résultats de Borel et Bernstein, Gelfand, Gelfand entrainent que :

- $\mathscr{H} = \mathbb{Z}[x]/\mathscr{I}$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$.

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par les polynômes symétriques de degré > 0. Des résultats de Borel et Bernstein, Gelfand, Gelfand entrainent que :

- $\mathscr{H} = \mathbb{Z}[x]/\mathscr{I}$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$. Les x_i's sont les classes de Chern des fibrés en droites quotients $V_i \to V_{i-1}$.

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par les polynômes symétriques de degré > 0. Des résultats de Borel et Bernstein, Gelfand, Gelfand entrainent que :

- $\mathscr{H} = \mathbb{Z}[x]/\mathscr{I}$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$. Les x_i's sont les classes de Chern des fibrés en droites quotients $V_i \to V_{i-1}$.
- Les $\mathfrak{S}_w(x)$ mod $\mathscr{I}$ coïncident avec la base des classes fondamentales des sous-variétés de Schubert de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$.

Polynômes de Schubert et variété de drapeaux

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par les polynômes symétriques de degré > 0. Des résultats de Borel et Bernstein, Gelfand, Gelfand entrainent que :

- $\mathscr{H} = \mathbb{Z}[x]/\mathscr{I}$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$. Les x_i's sont les classes de Chern des fibrés en droites quotients $V_i \to V_{i-1}$.
- Les $\mathfrak{S}_w(x)$ mod $\mathscr{I}$ coïncident avec la base des classes fondamentales des sous-variétés de Schubert de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$.

Problème

Calculer la classe de Chern totale du fibré tangent T de $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$

$$c(T) = \prod_{i<j}(1 + x_i - x_j)$$

en termes des $\mathfrak{S}_w(x)$.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. – *Classes de Chern des variétés de drapeaux*. Note (*) de **Alain Lascoux,** présentée par Marcel-Paul Schützenberger.

Nous étendons la formule de Cauchy (axiome n° 2, dans la numérotation de Grothendieck, de la théorie des λ-anneaux) aux polynômes de Schubert, et l'utilisons au calcul des classes de Chern des variétés de drapeaux.

ALGEBRAIC GEOMETRY. – Chern Classes of Flag Manifolds.

We extend Cauchy formula to Schubert polynomials, which are a natural generalization of Schur functions, and use it to compute the Chern classes of flag manifolds.

1. Polynômes de Schubert doubles. – On considère l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[A]$ des polynômes en les variables de $A=\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ et le groupe symétrique $W=W_{n+1}$ des permutations de A. On a défini dans [7] des opérateurs D_w, ∂_w indexés par les éléments de W; on désigne par ω l'élément de plus grande longueur de W. On pose $X_\omega=a_1^n a_2^{n-1}\ldots a_{n+1}^0$, et, suivant Demazure [3], Bernstein, Gelfand et Gelfand [1], on définit les *polynômes de Schubert* X_w par :

$$X_w=X_\omega\partial_{\omega w} \tag{1.1}$$

(*les opérateurs sont notés à droite*).

Soit $B=\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ un ensemble de même cardinal que A. On pose :

$$\mathbb{X}_\omega(A, B)=\Pi_{i+j\leqq n+1}(a_i+b_j) \tag{1.2}$$

Classes de Chern de la variété de drapeaux

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1 + 1, \ldots, x_n + 1)$ et $y = (x_n, \ldots, x_1)$.

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1+1,\dots,x_n+1)$ et $y = (x_n,\dots,x_1)$. Alors
$$c(T) = \prod_{i<j}((1+x_i)-x_j) = \Delta(x^+,y) = \mathfrak{S}_{w_0}(x^+,y).$$

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1+1, \ldots, x_n+1)$ et $y = (x_n, \ldots, x_1)$. Alors
$$c(T) = \prod_{i<j}((1+x_i) - x_j) = \Delta(x^+, y) = \mathfrak{S}_{w_0}(x^+, y).$$
- En utilisant la formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert doubles :
$$\mathfrak{S}_w(a,b) = \sum_{\partial_u \partial_v = \partial_w} \mathfrak{S}_v(a) \mathfrak{S}_{u^{-1}}(-b)$$

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1+1, \ldots, x_n+1)$ et $y = (x_n, \ldots, x_1)$. Alors
$$c(T) = \prod_{i<j}((1+x_i)-x_j) = \Delta(x^+, y) = \mathfrak{S}_{w_0}(x^+, y).$$

- En utilisant la formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert doubles :
$$\mathfrak{S}_w(a,b) = \sum_{\partial_u \partial_v = \partial_w} \mathfrak{S}_v(a) \mathfrak{S}_{u^{-1}}(-b)$$
et :
$$\mathfrak{S}_w(-y) \equiv \mathfrak{S}_{w_0 w w_0}(x) \bmod \mathscr{I},$$

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1+1, \ldots, x_n+1)$ et $y = (x_n, \ldots, x_1)$. Alors
$$c(T) = \prod_{i<j}((1+x_i) - x_j) = \Delta(x^+, y) = \mathfrak{S}_{w_0}(x^+, y).$$

- En utilisant la formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert doubles :
$$\mathfrak{S}_w(a,b) = \sum_{\partial_u \partial_v = \partial_w} \mathfrak{S}_v(a) \mathfrak{S}_{u^{-1}}(-b)$$
et :
$$\mathfrak{S}_w(-y) \equiv \mathfrak{S}_{w_0 w w_0}(x) \bmod \mathscr{I},$$
on obtient :
$$c(T) \equiv \sum_w \mathfrak{S}_w(x^+) \mathfrak{S}_{w_0 w}(x) \bmod \mathscr{I}.$$

Classes de Chern de la variété de drapeaux

- Soit $x^+ = (x_1 + 1, \ldots, x_n + 1)$ et $y = (x_n, \ldots, x_1)$. Alors
$$c(T) = \prod_{i<j}((1 + x_i) - x_j) = \Delta(x^+, y) = \mathfrak{S}_{w_0}(x^+, y).$$

- En utilisant la formule de Cauchy pour les polynômes de Schubert doubles :
$$\mathfrak{S}_w(a, b) = \sum_{\partial_u \partial_v = \partial_w} \mathfrak{S}_v(a) \mathfrak{S}_{u^{-1}}(-b)$$
et :
$$\mathfrak{S}_w(-y) \equiv \mathfrak{S}_{w_0 w w_0}(x) \bmod \mathscr{I},$$
on obtient :
$$c(T) \equiv \sum_w \mathfrak{S}_w(x^+) \mathfrak{S}_{w_0 w}(x) \bmod \mathscr{I}.$$

- $\mathfrak{S}_w(x^+) = \mathfrak{S}_w(x, -1) \quad \rightsquigarrow \quad$ formule de Cauchy :

Classes de Chern de la variété de drapeaux

Théorème (Lascoux 1982)

Dans l'anneau de cohomologie $\mathscr{H}$,

$$c(T) = \sum_{v,w} \mathfrak{S}_v(1)\mathfrak{S}_{vw}(x)\mathfrak{S}_{w_0 w}(x),$$

somme sur $v, w \in S_n$ avec $\ell(w) = \ell(v) + \ell(vw)$.

Classes de Chern de la variété de drapeaux

Théorème (Lascoux 1982)

Dans l'anneau de cohomologie $\mathscr{H}$,

$$c(T) = \sum_{v,w} \mathfrak{S}_v(1)\mathfrak{S}_{vw}(x)\mathfrak{S}_{w_0 w}(x),$$

somme sur $v, w \in S_n$ avec $\ell(w) = \ell(v) + \ell(vw)$.

- Le développement monomial de $\mathfrak{S}_v(x)$ a des descriptions combinatoires (Billey, Fomin, Jockusch, Kirillov, Kohnert, Lascoux, Reiner, Schützenberger, Shimozono, Stanley, Winkel).

Classes de Chern de la variété de drapeaux

Théorème (Lascoux 1982)

Dans l'anneau de cohomologie $\mathscr{H}$,

$$c(T) = \sum_{v,w} \mathfrak{S}_v(1)\mathfrak{S}_{vw}(x)\mathfrak{S}_{w_0 w}(x),$$

somme sur $v, w \in S_n$ avec $\ell(w) = \ell(v) + \ell(vw)$.

- Le développement monomial de $\mathfrak{S}_v(x)$ a des descriptions combinatoires (Billey, Fomin, Jockusch, Kirillov, Kohnert, Lascoux, Reiner, Schützenberger, Shimozono, Stanley, Winkel). $\rightsquigarrow$ les entiers $\mathfrak{S}_v(1)$ sont bien compris (formule de Macdonald).

Classes de Chern de la variété de drapeaux

Théorème (Lascoux 1982)

Dans l'anneau de cohomologie $\mathscr{H}$,

$$c(T) = \sum_{v,w} \mathfrak{S}_v(1)\mathfrak{S}_{vw}(x)\mathfrak{S}_{w_0 w}(x),$$

somme sur $v, w \in S_n$ avec $\ell(w) = \ell(v) + \ell(vw)$.

- Le développement monomial de $\mathfrak{S}_v(x)$ a des descriptions combinatoires (Billey, Fomin, Jockusch, Kirillov, Kohnert, Lascoux, Reiner, Schützenberger, Shimozono, Stanley, Winkel).
  $\leadsto$ les entiers $\mathfrak{S}_v(1)$ sont bien compris (formule de Macdonald).
- Il n'existe pas de description combinatoire du développement d'un produit de polynômes de Schubert.

Longueur	Permutations	c_u
0	12 345▼	1
1	12 354, 12 435▼, 13 245▼, 21 345▼	2
2	13 254, 21 354, 21 435▼	4
	12 453, 12 534, 13 425▼, 14 235▼, 23 145▼, 31 245▼	6
3	12 543, 14 325▼, 32 145▼	6
	21 453, 21 534, 23 154, 31 254	12
	14 253, 31 425▼	16
	13 524, 24 135▼	20
	13 452, 15 234, 23 415▼, 41 235▼	22
4	21 543, 32 154	12
	13 542, 15 324, 24 315▼, 42 135▼	24
	14 352, 15 243, 32 415▼, 41 325▼	28
	14 523, 34 125▼	44
	24 153, 31 524	52
	31 452, 41 253	56
	23 514, 25 134	78
	23 451, 51 234	90
5	14 523, 15 423, 34 215▼, 43 125▼	36
	15 342, 42 315▼	48
	31 542, 42 153	60
	23 541, 25 314, 52 134	102
	25 143, 32 514	104
	41 352	112
	32 451, 51 243	124
	51 324, 24 351	128
	41 523, 34 152	152
	35 124, 24 513	184
6	15 432, 43 215▼	24
	41 532, 43 152	132
	52 143, 32 541	144
	25 413, 35 214	162
	53 124, 24 531	174
	51 423, 34 251	224
	52 314, 25 341	228
	51 342, 42 351	268
	35 142, 42 513	320
	45 123, 34 512	436
7	53 214, 25 431	120
	51 432, 43 251	180
	54 123, 34 521	330
	53 142, 42 531	360
	45 213, 35 412	390
	45 132, 52 413, 43 512, 35 241	420
	52 341	600
8	54 213, 35 421	240
	54 132, 43 521	300
	45 312, 52 431, 53 241	420
	53 412, 45 231	600
9	45 321, 54 312	240
	53 421, 54 231	360
10	54 321	120

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

- Soit $h\colon E \to F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété X, et

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m = E, \qquad F = F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1$$

deux drapeaux de sous-fibrés et de fibrés quotients.

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

- Soit $h : E \to F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété X, et

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m = E, \qquad F = F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1$$

deux drapeaux de sous-fibrés et de fibrés quotients.

- Etant donné des entiers $r(p,q)$ $(1 \le p \le m,\ 1 \le q \le n)$, on définit

$$\Omega_{\mathbf{r}}(h) := \{x \in X \mid \mathrm{rk}(h(x) : E_p(x) \to F_q(x)) \le r(p,q), \forall p,q\}.$$

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

- Soit $h : E \to F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété X, et

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m = E, \qquad F = F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1$$

deux drapeaux de sous-fibrés et de fibrés quotients.

- Etant donné des entiers $r(p,q)$ $(1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n)$, on définit

$$\Omega_{\mathbf{r}}(h) := \{x \in X \mid \mathrm{rk}(h(x) : E_p(x) \to F_q(x)) \leq r(p,q), \forall p,q\}.$$

Théorème (Fulton, 1991)

Pour une fonction de rang $\mathbf{r}$ vérifiant des conditions appropriées, et pour un morphisme générique h, la classe $[\Omega_{\mathbf{r}}(h)] \in H^*(X)$ est un polynôme de Schubert double en les racines de Chern de E et F.

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

William Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas,* Duke Math. J. 1991.

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

William Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas,* Duke Math. J. 1991.

Since the cohomology of the flag manifold is the quotient of a ring of polynomials by an ideal generated by symmetric polynomials, a formula for Schubert varieties, as in [BGG] or [D], is only determined up to this ideal.

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

William Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas,* Duke Math. J. 1991.

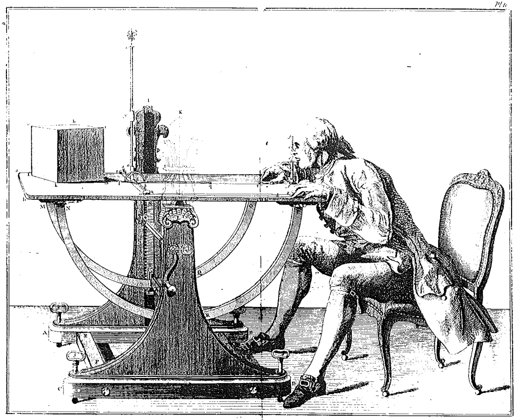
Since the cohomology of the flag manifold is the quotient of a ring of polynomials by an ideal generated by symmetric polynomials, a formula for Schubert varieties, as in [BGG] or [D], is only determined up to this ideal. Lascoux and Schützenberger introduced Schubert polynomials as a set of representatives for these classes with particularly nice properties.

Polynômes de Schubert et lieu de dégénérescence

William Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas,* Duke Math. J. 1991.

Since the cohomology of the flag manifold is the quotient of a ring of polynomials by an ideal generated by symmetric polynomials, a formula for Schubert varieties, as in [BGG] or [D], is only determined up to this ideal. Lascoux and Schützenberger introduced Schubert polynomials as a set of representatives for these classes with particularly nice properties. The present work can be seen as a complete geometric vindication of their insight: the Schubert polynomials are the only polynomials that satisfy the general degeneracy formula.

Le tirage de cette thèse a été assuré par les techniciennes de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Paris VII, Mesdames Barrier et Gilbert .



Le monoïde plaxique

Le monoïde plaxique

- $A = (a < b < c < \cdots)$, un alphabet ordonné de variables non-commutatives.

Le monoïde plaxique

- $A = (a < b < c < \cdots)$, un alphabet ordonné de variables non-commutatives.
- A^*, le monoïde libre sur A.

Le monoïde plaxique

- $A = (a < b < c < \cdots)$, un alphabet ordonné de variables non-commutatives.
- A^*, le monoïde libre sur A.

Définition

Le *monoïde plaxique* $\mathrm{Pl}(A)$ est le quotient $A^*/\equiv$, où $\equiv$ est la congruence engendrée par les relations de Knuth :

$$\begin{aligned} xzy &\equiv zxy \quad (x \leq y < z \in A), \\ yxz &\equiv yzx \quad (x < y \leq z \in A). \end{aligned}$$

Le monoïde plaxique

- $A = (a < b < c < \cdots)$, un alphabet ordonné de variables non-commutatives.
- A^*, le monoïde libre sur A.

Définition

Le *monoïde plaxique* $\mathrm{Pl}(A)$ est le quotient $A^* / \equiv$, où $\equiv$ est la congruence engendrée par les relations de Knuth :

$$
\begin{aligned}
xzy &\equiv zxy \quad (x \le y < z \in A), \\
yxz &\equiv yzx \quad (x < y \le z \in A).
\end{aligned}
$$

- Robinson-Schensted, Knuth:
  $\rightsquigarrow$ chaque classe plaxique contient un unique tableau de Young.

Le monoïde plaxique

- $A = (a < b < c < \cdots)$, un alphabet ordonné de variables non-commutatives.
- A^*, le monoïde libre sur A.

Définition

Le *monoïde plaxique* $\mathrm{Pl}(A)$ est le quotient $A^* / \equiv$, où $\equiv$ est la congruence engendrée par les relations de Knuth :

$$\begin{aligned} xzy &\equiv zxy \quad (x \leq y < z \in A), \\ yxz &\equiv yzx \quad (x < y \leq z \in A). \end{aligned}$$

- Robinson-Schensted, Knuth:
  $\rightsquigarrow$ chaque classe plaxique contient un unique tableau de Young.
  $\rightsquigarrow$ produit associatif sur l'ensemble des tableaux de Young.

La conjecture de Foulkes

La conjecture de Foulkes

Les polynômes de *Kostka-Foulkes* $K_{\lambda\mu}(q)$ sont définis par

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu}(q) P_\mu(q; x),$$

où les $P_\mu(q; x)$ sont les polynômes de Hall-Littlewood.

La conjecture de Foulkes

Les polynômes de *Kostka-Foulkes* $K_{\lambda\mu}(q)$ sont définis par

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu}(q) P_\mu(q;x),$$

où les $P_\mu(q;x)$ sont les polynômes de Hall-Littlewood.

Problème (Foulkes, 1974)

Montrer que $K_{\lambda\mu}(q) \in \mathbb{N}[q]$

La conjecture de Foulkes

Les polynômes de *Kostka-Foulkes* $K_{\lambda\mu}(q)$ sont définis par

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu}(q) P_\mu(q;x),$$

où les $P_\mu(q;x)$ sont les polynômes de Hall-Littlewood.

Problème (Foulkes, 1974)

Montrer que $K_{\lambda\mu}(q) \in \mathbb{N}[q]$ en exhibant une statistique combinatoire $T \mapsto \mathrm{c}(T)$ sur l'ensemble des tableaux de Young de forme λ et de poids μ, telle que :

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{T \in \mathrm{Tab}(\lambda,\mu)} q^{\mathrm{c}(T)}.$$

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur une conjecture de* H. O. Foulkes. Note (*) de **Alain Lascoux** et **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On annonce la preuve d'une conjecture de H. O. Foulkes sur certains polynômes intervenant dans les fonctions symétriques associées aux représentations projectives du groupe symétrique et des groupes linéaires sur les corps finis.

One sketches a proof of Foulkes' conjecture on the polynomials defining Littlewood Q-functions in terms of Schur functions.

On note Z^N l'ensemble des applications I de N dans Z telles que $n\,\mathrm{I}=0$ pour tout n assez grand ce qui permet de définir $\mathrm{I}^\Sigma \in Z^N$ par $n\,\mathrm{I}^\Sigma = \sum_{m \geqq n} m\,\mathrm{I}$; le *poids* de I est donc $0\,\mathrm{I}^\Sigma$. Les partitions d'un entier n sont les $\mathrm{I} \in Z^N$ de poids n telles que $0\,\mathrm{I} \geqq 1\,\mathrm{I} \geqq 2\,\mathrm{I} \geqq \ldots$

Littlewood (1) a défini une famille basique de fonctions symétriques (en les variables d'un ensemble arbitraire qu'il est inutile d'expliciter) indexées par les partitions, $\{\mathrm{Q}(\mathrm{I})\}$ au moyen d'une identité

$$\mathrm{Q}(\mathrm{I}) = \sum s'(\mathrm{J})\,\mathrm{F}(\mathrm{I};\mathrm{J}), \tag{1}$$

dans laquelle les $s'(\mathrm{J})$ sont les fonctions de Schur (modifiées), la sommation est étendue à toutes les partitions J de même poids que I et les $\mathrm{F}(\mathrm{I};\mathrm{J})$ sont des polynômes à coefficients entiers en une nouvelle variable q. Nous proposons d'appeler ces derniers *polynômes de Foulkes* en mémoire du regretté H. O. Foulkes auquel sont dus tant de beaux résultats sur les fonctions symétriques et qui a émis (2) la conjecture que tous leurs coefficients sont dans N. Nous faisons remarquer que ces polynômes sont les caractéristiques (polynomiales) d'Euler-Poincaré des modules inversibles de variétés drapeaux.

Nous annonçons le :

THÉORÈME I. — $\mathrm{F}(\mathrm{I};\mathrm{J})$ *est un polynôme monique à coefficients non négatifs qui est nul si l'une des différences* $n\,\mathrm{I}^\Sigma - n\,\mathrm{J}^\Sigma$ $(n \in \mathrm{N})$ *est négative et dont le degré est égal à leur somme dans le cas*

Cyclage et charge

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \ (u, v \in \mathscr{M})$.

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \;\; (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \ (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \; (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

- Il existe une statistique $T \mapsto \mathrm{co}(T)$ sur $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ telle que

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \ (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

- Il existe une statistique $T \mapsto \mathrm{co}(T)$ sur $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ telle que
  - $\mathrm{co}(R) = 0$ pour l'unique tableau ligne $R \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$.

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \ (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

- Il existe une statistique $T \mapsto \mathrm{co}(T)$ sur $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ telle que
  - $\mathrm{co}(R) = 0$ pour l'unique tableau ligne $R \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$.
  - Soit x la première lettre de la première ligne du tableau $T \neq R$, de sorte que $T = xw$. Soit T' l'unique tableau dans la classe plaxique de wx. Alors $\mathrm{co}(T) = \mathrm{co}(T') + 1$.

Cyclage et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu, \ (u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

- Il existe une statistique $T \mapsto \mathrm{co}(T)$ sur $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ telle que
  - $\mathrm{co}(R) = 0$ pour l'unique tableau ligne $R \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$.
  - Soit x la première lettre de la première ligne du tableau $T \neq R$, de sorte que $T = xw$. Soit T' l'unique tableau dans la classe plaxique de wx. Alors $\mathrm{co}(T) = \mathrm{co}(T') + 1$.
- Soit $\mathrm{c}(T) := \max\{\mathrm{co}(U) \mid U \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)\} - \mathrm{co}(T)$.

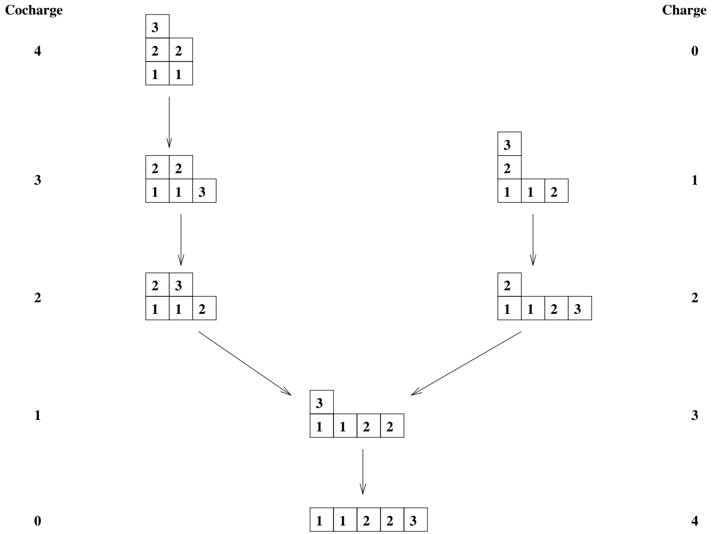
Cycle et charge

- La *relation de conjugaison* dans un monoïde $\mathscr{M}$ est l'équivalence $\sim$ engendrée par: $uv \sim vu$, $(u, v \in \mathscr{M})$.
- Dans le monoïde plaxique $\mathrm{Pl}(A)$, les classes de conjugaison sont les ensembles $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ de tableaux de Young de poids μ.

Théorème (Lascoux-Schützenberger, 1978)

- Il existe une statistique $T \mapsto \mathrm{co}(T)$ sur $\mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$ telle que
  - $\mathrm{co}(R) = 0$ pour l'unique tableau ligne $R \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)$.
  - Soit x la première lettre de la première ligne du tableau $T \neq R$, de sorte que $T = xw$. Soit T' l'unique tableau dans la classe plaxique de wx. Alors $\mathrm{co}(T) = \mathrm{co}(T') + 1$.
- Soit $\mathrm{c}(T) := \max\{\mathrm{co}(U) \mid U \in \mathrm{Tab}(\cdot, \mu)\} - \mathrm{co}(T)$. Alors $\mathrm{c}(T)$ est la statistique recherchée.

Cyclage and charge ($\mu = (2,2,1)$)



Le monoïde plaxique (suite)

Marcel-Paul Schützenberger, in *Pour le monoïde plaxique*, une lettre à G.-C. Rota, 1995.

Le monoïde plaxique (suite)

Marcel-Paul Schützenberger, in *Pour le monoïde plaxique*, une lettre à G.-C. Rota, 1995.

En des lieux divers (le Japon, Strasbourg, le MIT, Marne-la-Vallée), les mathématiciens qui développent la théorie des groupes quantiques ont retrouvé le monoïde plaxique ou l'un de ses quotients comme cas particuliers de leurs constructions: quand, dans leur poétique, ils font tendre la température q *vers 0 pour les cristalliser.*

Le monoïde plaxique (suite)

Marcel-Paul Schützenberger, in *Pour le monoïde plaxique*, une lettre à G.-C. Rota, 1995.

En des lieux divers (le Japon, Strasbourg, le MIT, Marne-la-Vallée), les mathématiciens qui développent la théorie des groupes quantiques ont retrouvé le monoïde plaxique ou l'un de ses quotients comme cas particuliers de leurs constructions: quand, dans leur poétique, ils font tendre la température q *vers 0 pour les cristalliser.*

J.-Y. Thibon et B. Leclerc remontent les grands fleuves de ce continent qu'ils sont en train de découvrir. A. Lascoux organise l'expédition que je regarde partir de mon hamac, entre deux palétuviers dans l'estuaire.

LLT au travail

Polynômes LLT

Polynômes LLT

- On peut écrire

$$Q'_\mu(q;x) = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu}(q) s_\lambda(x),$$

où $Q'_\mu(q;x)$ est le polynôme de Hall-Littlewood modifié.

Polynômes LLT

- On peut écrire

$$Q'_\mu(q;x) = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu}(q) s_\lambda(x),$$

  où $Q'_\mu(q;x)$ est le polynôme de Hall-Littlewood modifié.
- $Q'_\mu(1;x) = \prod_k h_{\mu_k}(x)$, ainsi $Q'_\mu(q;x)$ est un q-analogue d'un produit de polynômes symétriques complets.

Polynômes LLT

- On peut écrire

$$Q'_\mu(q;x) = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu}(q) s_\lambda(x),$$

  où $Q'_\mu(q;x)$ est le polynôme de Hall-Littlewood modifié.
- $Q'_\mu(1;x) = \prod_k h_{\mu_k}(x)$, ainsi $Q'_\mu(q;x)$ est un q-analogue d'un produit de polynômes symétriques complets.
- Les polynômes LLT sont des généralisations des $Q'_\mu(q;x)$ donnant des q-analogues de produits de polynômes de Schur.

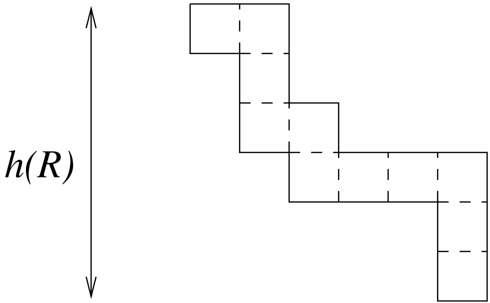
Polynômes LLT

- On peut écrire

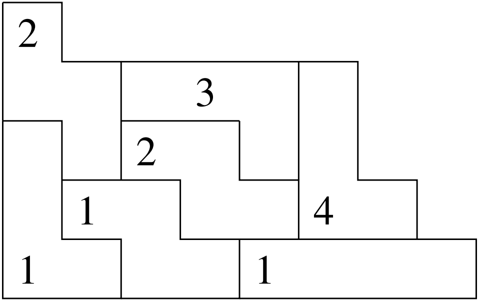
$$Q'_\mu(q;x) = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu}(q) s_\lambda(x),$$

  où $Q'_\mu(q;x)$ est le polynôme de Hall-Littlewood modifié.
- $Q'_\mu(1;x) = \prod_k h_{\mu_k}(x)$, ainsi $Q'_\mu(q;x)$ est un q-analogue d'un produit de polynômes symétriques complets.
- Les polynômes LLT sont des généralisations des $Q'_\mu(q;x)$ donnant des q-analogues de produits de polynômes de Schur.
- Ils sont définis combinatoirement en termes de tableaux de rubans.

Un 11-ruban de hauteur h(R)=6



Un tableau de 4-rubans de spin 9



Tableaux de rubans et polynômes symétriques

Tableaux de rubans et polynômes symétriques

- Etant donné des partitions $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, il existe une unique partition λ dont le n-quotient est $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)})$.

Tableaux de rubans et polynômes symétriques

- Etant donné des partitions $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, il existe une unique partition λ dont le n-quotient est $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)})$. On a :

$$
\begin{aligned}
s_{\lambda^{(1)}}(x) \cdots s_{\lambda^{(n)}}(x) &= \sum_{\mu} |\mathrm{Tab}_n(\lambda, \mu)| m_\mu(x) \\
&= \sum_{T \in \mathrm{Tab}_n(\lambda, \cdot)} x^T.
\end{aligned}
$$

Tableaux de rubans et polynômes symétriques

- Etant donné des partitions $\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)}$, il existe une unique partition λ dont le n-quotient est $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)})$. On a :

$$\begin{aligned} s_{\lambda^{(1)}}(x)\cdots s_{\lambda^{(n)}}(x) &= \sum_{\mu} |\mathrm{Tab}_n(\lambda,\mu)| m_\mu(x) \\ &= \sum_{T\in \mathrm{Tab}_n(\lambda,\cdot)} x^T. \end{aligned}$$

Théorème (Lascoux-L-Thibon, 1997)

- Définissons : $G(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)};q;x) := \sum_{T\in\mathrm{Tab}_n(\lambda,\cdot)} q^{\mathrm{spin}(T)} x^T.$

Tableaux de rubans et polynômes symétriques

- Etant donné des partitions $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}$, il existe une unique partition λ dont le n-quotient est $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)})$. On a :

$$\begin{aligned} s_{\lambda^{(1)}}(x) \cdots s_{\lambda^{(n)}}(x) &= \sum_{\mu} |\mathrm{Tab}_n(\lambda, \mu)| m_\mu(x) \\ &= \sum_{T \in \mathrm{Tab}_n(\lambda, \cdot)} x^T. \end{aligned}$$

Théorème (Lascoux-L-Thibon, 1997)

- Définissons : $G(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}; q; x) := \sum_{T \in \mathrm{Tab}_n(\lambda, \cdot)} q^{\mathrm{spin}(T)} x^T$.
- $G(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}; q; x)$ est un polynôme symétrique.

Tableaux de rubans et polynômes symétriques

- Etant donné des partitions $\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)}$, il existe une unique partition λ dont le n-quotient est $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)})$. On a :

$$\begin{aligned} s_{\lambda^{(1)}}(x)\cdots s_{\lambda^{(n)}}(x) &= \sum_{\mu} |\mathrm{Tab}_n(\lambda,\mu)| m_\mu(x) \\ &= \sum_{T\in\mathrm{Tab}_n(\lambda,\cdot)} x^T. \end{aligned}$$

Théorème (Lascoux-L-Thibon, 1997)

- Définissons : $G(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)};q;x) := \sum_{T\in\mathrm{Tab}_n(\lambda,\cdot)} q^{\mathrm{spin}(T)} x^T$.
- $G(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(n)};q;x)$ est un polynôme symétrique.
- $G((\mu_1),\dots,(\mu_n);q;x) = Q'_\mu(q;x)$.

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)};q;x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q)s_{\nu}(x).$

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}; q; x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(n)}}(q) s_{\nu}(x)$.

- $c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(n)}}(q)$ est un polynôme de Kazhdan-Lusztig parabolique de type affine A (L-Thibon, 1998).

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}; q; x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \ldots \lambda^{(n)}}(q) s_{\nu}(x)$.

- $c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \ldots \lambda^{(n)}}(q)$ est un polynôme de Kazhdan-Lusztig parabolique de type affine A (L-Thibon, 1998).
- $\rightsquigarrow c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \ldots \lambda^{(n)}}(q) \in \mathbb{N}[q]$ (Kashiwara-Tanisaki, 1999).

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)};q;x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q) s_{\nu}(x)$.

- $c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q)$ est un polynôme de Kazhdan-Lusztig parabolique de type affine A (L-Thibon, 1998).
- $\rightsquigarrow c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q) \in \mathbb{N}[q]$ (Kashiwara-Tanisaki, 1999).

Haglund, Haiman et Loehr ont généralisé les polynômes LLT aux formes gauches λ/μ.

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}; q; x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(n)}}(q) s_{\nu}(x)$.

- $c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(n)}}(q)$ est un polynôme de Kazhdan-Lusztig parabolique de type affine A (L-Thibon, 1998).
- $\rightsquigarrow c^{\nu}_{\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(n)}}(q) \in \mathbb{N}[q]$ (Kashiwara-Tanisaki, 1999).

Haglund, Haiman et Loehr ont généralisé les polynômes LLT aux formes gauches λ/μ.

- Développement combinatoire des polynômes de Macdonald en termes de LLT généralisés (Haglund-Haiman-Loehr, 2005).

Polynômes LLT (suite)

Ecrivons : $G(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)};q;x) := \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q)s_{\nu}(x)$.

- $c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q)$ est un polynôme de Kazhdan-Lusztig parabolique de type affine A (L-Thibon, 1998).
- $\rightsquigarrow c^{\nu}_{\lambda^{(1)}\ldots\lambda^{(n)}}(q) \in \mathbb{N}[q]$ (Kashiwara-Tanisaki, 1999).

Haglund, Haiman et Loehr ont généralisé les polynômes LLT aux formes gauches λ/μ.

- Développement combinatoire des polynômes de Macdonald en termes de LLT généralisés (Haglund-Haiman-Loehr, 2005).
- Positivité des LLT généralisés $\rightsquigarrow$ nouvelle preuve de la positivité des (q,t)-polynômes de Kostka (Haiman-Grojnowski, 2008).

Collaborateurs d'Alain

Co-authors (by number of collaborations)

Akyıldız, Ersan Barrucand, Pierre-A. Berger, Marcel Boussicault, Adrien Brunat, Josep M. Carré, Christophe Chappell, Tom Chen, William Y. C. de Gier, Jan Descouens, François Duchamp, Gérard H. E. Féray, Valentin Fu, Amy M. Fulton, William Gel'fand, Izrail' Moiseevich Hou, Qing-Hu Józefiak, Tadeusz Kassel, Christian Kerber, Adalbert Kirillov, Alexander A., Jr. Kirillov, Anatoliĭ N. Kohnert, Axel Krattenthaler, Christian F. Krob, Daniel Laksov, Dan Lapointe, Luc Lassalle, Michel Leclerc, Bernard Montes, Antonio Morse, Jennifer Mu, Yan-Ping Novelli, Jean-Christophe Pragacz, Piotr Rains, Eric M. Reiner, Victor Retakh, Vladimir S. Reutenauer, Christophe Scharf, Thomas Schützenberger, Marcel-Paul Shi, He Sorrell, Mark Thibon, Jean-Yves Thorup, Anders Warnaar, S. Ole Zudilin, V. V.

Alain en Pologne

Le phalanstère

Alain en Chine

Visitor_Lascoux http://www.combinatorics.cn/people/visitor_lascoux.htm

Center for Combinatorics
Nankai University

Home | About us | News | People | Research | Publications | Education | Activities | Annals | Employment | Resources

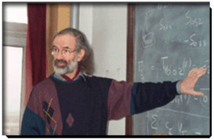
Location: Home » People » Visitors

Faculty

Z. X. Wan
Bill Chen
X. L. Li
Guoce Xin
Roger Yu
W. D. Gao
W. B. Ma
Z. P. Lu
Q. H. Hou
Arthur Yang
Nancy Gu
Amy Fu

Visitors

R. Entriger
L. W. Shapiro
R. N. Mohan
A. Dress
I. Gutman
G. H. Fan
Yi Hu
X. X. Yu
Visitors in 2006
Visitors in 2005
Visitors in 2004



Prof. Alain Lascoux

Researcher of Centre National de la Researche Scientifique

Email:Alain.Lascoux@univ-mlv.fr
Homepage:http://www.combinatorics.net/lascoux/index.html

Research Interests

- Algebraic Combinatorics
- Symmetric Function
- Representation Theory

Teaching

- Symmetric Function

Pétition pour Grothendieck

PETITION

En poursuivant M.Alexandre GROTHENDIECK , mathématicien, le Parquet de Montpellier vient rappeler l'existence de l'article 21 de l'ordonnance du 2 novembre 1945, modifiée par la loi du 5 juillet 1972 :

" Tout individu qui, par aide directe ou indirecte, a facilité ou tenté de faciliter l'entrée, la circulation ou le séjour irrégulier d'un étranger est passible d'un emprisonnement de deux mois à deux ans et d'une amende de 2000 à 200.000 Francs ... "

Qui, par ailleurs, n'a contrevenu à l'article 22 de la même ordonnance :

" Toute personne logeant un étranger, en quelque qualité que ce soit, même à titre gracieux, doit en faire la déclaration dans les quarante-huit heures de l'arrivée de l'étranger, au commissaire de police ou au maire ... " ?

Dans la situation actuelle de précarité et d'insécurité des étrangers en France, qui peut se sentir à l'abri d'une menace de poursuite, pour avoir simplement voulu aider un étranger ?

En conséquence,

les soussignés protestent contre les mesures discriminatoires à l'égard des étrangers et demandent l'abrogation de l'article 21 de l'ordonnance du 2.11.45 .

NOM	QUALITE	SIGNATURE
CHENCINER	M. de C.	[illegible]
BENNEQUIN	[illegible]	[illegible]
VOGEL	M de C	[illegible]
COLOMBÉ	Assist	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
LESAFFRE	M. Assistant	[illegible]
CARVE	M. Assistant	[illegible]
ROISIN	Assistant	[illegible]
[illegible]	Assistant	[illegible]
TROTMAN	Assistant	[illegible]
SCHREIBER	M. de Conf	[illegible]
[illegible]	Assistant	[illegible]
Rosenberg A.	Prof.	A Rosenberg
LE J.P.	Prof.	[illegible]
STERN J.	M. Ass.	[illegible]
MARLIN	A.R. CNRS	[illegible]
ADAM	[illegible]	[illegible]

NOM	QUALITE	SIGNATURE
Roger	M.A	[illegible]
Lefèvre G	Assist	[illegible]
DIXMIER	professeur	[illegible]
MOEGLIN	A R CNRS	C. Moeglin
GERARD GERGELY	M de C	[illegible]
HENNEÇART	AR CNRS	[illegible]
STEHLÉ J.-L.	Chercheur Maths (I.B.M.)	[illegible]
HOUZEL C.	Professeur	C Houzel
BOURGUIGNON	Chargé de recherche CNRS	[illegible]
CONNES	Paris VI	[illegible]
Godement	Paris VII	[illegible]
CHAPIAL	Paris VII	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
FLEXOR	CNRS CR	M. Flexor
PIENE	Oslo, Norvège	Ragni Piene

Ce texte sera transmis à Grothendieck, à la presse et à différentes associations telles que l'Association française des Juristes Démocrates, le M.R.A.P. , la Ligue des Droits de l'Homme, ...

A.LASCOUX


POLYNÔMES
ALAIN LASCOUX


NANKAI UNIVERSITY